
STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY

ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

PUBBLICATI

DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime all' Università di Roma

E Compilati da

E. BETTI a *Pisa* — A. GENOCCHI a *Torino*

F. BRIOSCHI a *Pavia* — B. TORTOLINI a *Roma*

(In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche)

TOMO VII.

ROMA

PRESSO FRANCESCO BLEGGI LIBRAJO

(Via del Piè di Marmo N°. 38.)

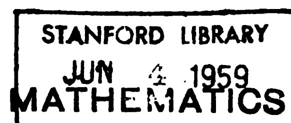
1865.

Reprinted with the permission of the original publishers.

JOHNSON REPRINT CORPORATION

NEW YORK, NEW YORK

First reprinting, 1959, Johnson Reprint Corporation



ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA.

SULLE SUPERFICIE

NELLE QUALI

LA SOMMA DEI DUE RAGGI DI CURVATURA PRINCIPALE È COSTANTE

NOTA

DI

ULISSE DINI

1. L' integrazione della equazione che dà le superficie per le quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante, presenta delle gravi difficoltà se si vuole fare uso delle coordinate ordinarie. Queste difficoltà spariscono servendosi del nuovo sistema di variabili introdotto nella Geometria dal Sig. Ossian Bonnet (*); ed io in questo breve lavoro mi propongo appunto di trovare l' equazioni di tali superficie in questo sistema di variabili, e di mostrare inoltre come, quasi coi metodi stessi impiegati dal Sig. Bonnet nella trattazione delle superficie di area minima, si possano risolvere varii problemi intorno alle superficie che considero, e si possa anche trovarne alcune loro proprietà. Ma dapprima bisogna che io richiami dalla bella memoria dell' illustre Geometra i preliminari del suo sistema di coordinate.

2. Siano ξ, η, ζ le coordinate ortogonali di un punto qualunque M di una superficie; le variabili x, y, z che il Sig. Bonnet introduce nella Geometria sono respettivamente: l' angolo del piano condotto per la normale MN parallelamente all' asse delle ζ col piano delle (ξ, ζ); il logaritimo della tangente della metà dell' angolo che la

---

(*) Vedi Journal de Liouville tom. V. 2. serie 1860.

normale fa coll' asse ζ, e la distanza dell' origine alla traccia del piano tangente sul piano delle (ξ, η).

Per ragioni facili a scoprirsi il Sig. Bonnet chiama rispettivamente *meridiani* e *paralleli* le linee coordinate $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, e ponendo

$$\frac{dz}{dx} = p \,, \qquad \frac{dz}{dy} = q \,,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r \,, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s \,, \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

Egli dimostra che fra le antiche e le nuove coordinate esistono le relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \xi \cos x + \eta \operatorname{sen} x = -z - i \operatorname{tang} iy.q \,, \\ \xi \operatorname{sen} x - \eta \cos x = p \,, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy} \,, \end{cases}$$

che riduconsi alle altre

$$(2) \quad \begin{cases} r \cos (x - \omega) = - z - i \operatorname{tang} iy.q \,, \\ r \operatorname{sen} (x - \omega) = p \,, \\ \zeta = \dfrac{q}{\cos iy} \,, \end{cases}$$

introducendo le coordinate polari r ed ω in luogo delle rettangolari ξ e η.

Ponendo inoltre

$$(3) \quad r + i \operatorname{tang} iy.q + z = u \,, \quad s = v \,, \quad t + i \operatorname{tang} iy.q = w$$

trova le relazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{dv}{dx} + i \operatorname{tang} iy.w \,, \\ \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dv}{dy} + i \operatorname{tang} iy.v \,, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} v = \cos iy.\dfrac{d\zeta}{dx} \,, \\ w = \cos iy \dfrac{d\zeta}{dy} \,, \\ u = \displaystyle\int \left(\cos iy \frac{d^2\zeta}{dx^2} + i \operatorname{sen} iy \frac{d\zeta}{dy} \right) dy \,, \end{cases}$$

e dimostra che le equazioni (4) sono caratteristiche, cioè che tre funzioni qualunque di x e y prese per i valori di u, v, w e che verificano le equazioni (4), si riferiscono sempre a una, e a una sola, superficie.

3. Premesso ciò, passiamo a occuparci delle superficie per le quali si ha

$$R + R' = 2m,$$

ove R e R' sono i due raggi di curvatura principale, ed m è una costante.

L'equazione che dà i due raggi di curvatura di una superficie qualunque (u,v,w) è

$$R^2 - (u + w) \cos iy . R + (uw - v^2) \cos^2 iy = 0;$$

le superficie che noi cerchiamo sono dunque quelle per le quali si ha

$$(6) \qquad u + w = \frac{2m}{\cos iy}.$$

Differenziamo questa equazione rispetto ad y coll'avere riguardo alle equazioni (5); si otterrà l'altra

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 2m \frac{i \operatorname{tang} iy}{\cos^2 iy},$$

che, integrata, ci darà il valore di ζ relativo alle superficie in questione.

Questa equazione d'altronde è subito integrabile, e ci dà

$$(7) \qquad \zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy) - mi \operatorname{tang} iy,$$

ove f e f_1 sono due funzioni arbitrarie reali o immaginarie.

Volendo evitare in questo integrale la forma immaginaria, basterà scriverlo

$$\zeta = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x + iy) + \varphi(x - iy)\Big] + \frac{i}{2}\Big[\varphi_1(x - iy) - \varphi_1(x - iy)\Big] - mi \operatorname{tang} iy,$$

essendo φ e φ_1 due funzioni reali.

In ciò che segue, porremo per brevità

$$(8) \qquad \zeta_1 = f(x + iy) + f_1(x - iy),$$

il valore di ζ per le superficie $R + R' = 2m$, sarà perciò

$$(9) \qquad \zeta = \zeta_1 - mi \operatorname{tang} iy.$$

4. Conoscendo ora il valore di ζ, si otterrà quello di z dalla terza delle equazioni (1), mediante un'altra integrazione che dipende soltanto dalle quadrature.

Questa integrazione porterà una funzione arbitraria X di x, la quale dovrà determinarsi in modo che l'equazione (6) resti soddisfatta. Tale determinazione si fa però facilmente. Osserviamo infatti che avendosi

$$z = \int_0^y \zeta \cos iy \, dy + X = \int_0^y \zeta_1 \cos iy \, dy + m \cos iy - m + X,$$

sarà

$$u = \frac{d^2 z}{dx^2} + i \operatorname{tang} iy . q + z = \int_0^y \frac{d^2\zeta_1}{dx^2} \cos iy \, dy + \int_0^y \zeta_1 \cos iy \, dy + \zeta_1 \, i \operatorname{sen} iy$$

$$+ \frac{m}{\cos iy} - m + X'' + X;$$

ma poichè
$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} + \frac{d^2\zeta_1}{dy^2} = 0,$$

si avrà
$$\int_0^y \frac{d^2\zeta_1}{dx^2} \cos iy . dy = - \int_0^y \frac{d^2\zeta_1}{dy^2} \cos iy \, dy,$$

talchè integrando per parti due volte di seguito nel secondo membro, e indicando con $\left(\frac{d\zeta_1}{dy}\right)_0$ ciò che diviene $\frac{d\zeta_1}{dy}$ per $y = 0$, si otterrà

$$u = -\frac{d\zeta_1}{dy} \cos iy + \left(\frac{d\zeta_1}{dx}\right)_0 + \frac{m}{\cos iy} - m + X'' + X.$$

Osserviamo ora che si ha $w = \frac{m}{\cos iy} + \cos iy \frac{d\zeta_1}{dy}$, per cui se si vuole che sia $u + w = \frac{2m}{\cos iy}$, bisognerà che si abbia

$$\left(\frac{d\zeta_1}{dy}\right)_0 - m + X'' + X = 0.$$

L'integrale di questa equazione darà per X il valore cercato che sarà

$$X = C \cos x + C' \operatorname{sen} x + \int_0^x \left(\frac{d\zeta_1}{dy}\right)_{\alpha,0} \operatorname{sen}(\alpha - x) \, d\alpha + m,$$

ove C e C' sono due costanti arbitrarie, e $\left(\frac{d\zeta_1}{dy}\right)_{\alpha,0}$ rappresenta il valore di $\frac{d\zeta_1}{dy}$ per $x = \alpha$, $y = 0$.

Ponendo dunque per brevità

$$(10) \qquad z_1 = \mathrm{C}\cos x + \mathrm{C}'\operatorname{sen} x + \int_0^y \zeta_1 \cos iy\, dy + \int_0^x \left(\frac{d\zeta_1}{dy}\right)_{\alpha,0} \operatorname{sen}(\alpha - x)\, d\alpha\,,$$

si avrà pel valore di z,

$$(11) \qquad z = z_1 + m \cos iy\,,$$

e si osserverà che in z_1 i termini $\mathrm{C}\cos x$, $\mathrm{C}'\operatorname{sen} x$, possono sempre trascurarsi, poichè basta trasportare gli assi delle (ξ, η, ζ) parallelamente a loro stessi nel punto $(-\mathrm{C}, -\mathrm{C}', 0)$ per fare sparire i medesimi termini dal valore di z.

5 Per le formole (9) e (11), le equazioni (1) e (2) si trasformano nelle altre

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi \cos x + \eta \operatorname{sen} x = -z_1 - i\zeta_1 \operatorname{sen} iy - \frac{m}{\cos iy}\,, \\ &\xi \operatorname{sen} x - \eta \cos x = \frac{dz_1}{dx}, \\ &\zeta = \zeta_1 - mi \operatorname{tang} iy. \end{aligned} \right.$$

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &r \cos(x - \omega) = -z_1 - i\zeta_1 \operatorname{sen} iy - \frac{m}{\cos iy}\,, \\ &r \operatorname{sen}(x - \omega) = \frac{dz_1}{dx}, \\ &\zeta = \zeta_1 - mi \operatorname{tang} iy. \end{aligned} \right.$$

E poichè in queste equazioni le quantità z e ζ_1 sono conosciute, possiamo dire che se le une che le altre sono le equazioni in termini finiti delle superficie cercate $\mathrm{R} + \mathrm{R}' = 2m$. Dopo di avere assegnato le forme delle funzioni arbitrarie che entrano nei valori di z_1 e ζ_1, l'eliminazione di x e y dalle equazioni (12) o dalle (13) darebbe l'equazione in ξ, η, ζ, o in r, ω, ζ delle superficie in questione.

Per ciò che precede, si vede che i valori di u, v, w per queste superficie sono dati dalle formole

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &u = \frac{m}{\cos iy} - \cos iy \frac{d\zeta_1}{dy}\,, \\ &v = \cos iy \frac{d\zeta_1}{dy}\,, \\ &w = \frac{m}{\cos iy} + \cos iy \frac{d\zeta_1}{dy}\,. \end{aligned} \right.$$

6. Chiamando θ l'angolo che la normale a una superficie fa coll'asse delle ζ, si ha

$$i \tang iy = \cos \theta ;$$

se dunque si danno ad m due valori qualunque differenti h e h_1, la formola (8) ci mostra (cosa evidente anche a *priori*) che le superficie (h) e (h_1) corrispondenti alle stesse forme delle funzioni f e f_1 sono superficie parallele fra loro, e quindi anche a quelle corrispondenti ad $m = 0$, cioè alle superficie di minima estensione.

7. Applichiamo ora le formole che abbiamo trovate alla ricerca e allo studio di alcune superficie semplici fra quelle per le quali $R + R' = 2m$.

Poniamo nel valore di ζ_1

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(a + ib)(x - iy) \ , \qquad f_1(x - iy) = -\frac{1}{2}(a - ib)(x - iy)$$

sarà

$$\zeta_1 = ax + by ,$$

e l'equazione (10), trascurando i termini in $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, darà facilmente

$$z_1 = -(ax + by)\, i \operatorname{sen} iy - b \cos iy ;$$

talchè le equazioni (13) ci daranno

$$(15) \quad \begin{cases} r \cos(x - \omega) = b \cos iy - \dfrac{m}{\cos iy} , \\ r \operatorname{sen}(\omega - x) = ai \operatorname{sen} iy , \\ \qquad \zeta = ax + by - mi \tang iy , \end{cases}$$

per le equazioni delle superficie $R + R' = 2m$ corrispondenti alle forme adottate delle funzioni f e f_1.

Nel caso di a e b nulli, si ottiene da queste formole l'equazione $r^2 + \zeta^2 = m^2$, la quale ci dice che fra le superficie che si considerano havvi la sfera di raggio m; cosa ben nota.

Quando a soltanto è nullo, le equazioni precedenti riduconsi alle altre

$$(16) \quad \begin{cases} r = b \cos iy - \dfrac{m}{\cos iy} , \\ \zeta = by - mi \tang iy , \end{cases}$$

le quali ci mostrano che le superficie corrispondenti sono di rivoluzione, e hanno per curva meridiana la curva la cui equazione in r e ζ si ottiene eliminando y da

queste ultime. Escludendo dalle nostre considerazioni, il caso di $b=0$, che ci dà la sfera, l' eliminazione di y dalle equazioni (16) si fà facilmente. La prima di esse ci da infatti

$$(17) \qquad \cos iy = \frac{r}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4b^2} + \frac{m}{b}},$$

e sostituendo nella seconda, coll' osservare che

$$\cos iy = \cos h.y, \quad \operatorname{tang} h.y = \frac{\sqrt{\cos^2 h.y - 1}}{\cos h.y},$$

si ottiene per la equazione richiesta

$$(18) \quad \zeta = b \operatorname{arc} \cos h \left\{ \frac{r}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4b^2} + \frac{m}{b}} \right\} \pm \frac{m \sqrt{2r^2 + 4mb - 4b^2 \pm 2r\sqrt{r^2 + 4mb}}}{r \pm \sqrt{r^2 + 4mb}}$$

Essendo θ l' angolo che la normale a una superficie fa coll' asse delle ζ, si ha

$$i \operatorname{tang} iy = \cos\theta,$$

per cui nel nostro caso sarà

$$\cos\theta = \mp \frac{\sqrt{2r^2 + 4mb - 4b^2 \pm 2r\sqrt{r^2 + 4mb}}}{r \pm \sqrt{r^2 + 4mb}}$$

Osserviamo ora che il valore (17) di $\cos iy$, e quindi quello (18) di ζ sono reali per $r=0$, quando $b<m$; se ne conclude che le superficie di rivoluzione, che ora studiamo, corrispondenti ai valori di $b<m$, hanno delle falde che tagliano l' asse di rivoluzione, e queste falde presentano sull' asse una specie di regresso, poichè il valore $\sqrt{1-\frac{b}{m}}$ di $\cos\theta$ per $r=0$ è differente dall' unità. La superficie corrispondente a $b=m$ è tangente all' asse.

Poichè si ha in ogni superficie $\cos iy = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, la prima delle equazioni (16), per $b=m$, ci dà $r = \frac{m\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, e questa ci mostra che la curva meridiana della superficie di rivoluzione (16) corrispondente a $b=m$, gode della proprietà geometrica che *la lunghezza della normale è media proporzionale fra la lunghezza della tangente e la costante m.*

Se T è la lunghezza della tangente, il raggio di curvatura di quella curva è dunque

$$R = 2m - \sqrt{mT}.$$

Vedremo fra non molto che le superficie di rivoluzione aventi per meridiane le curve (16) sono le sole superficie di tal classe, e più generalmente sono le sole superficie aventi un sistema di linee di curvatura in piani paralleli che godano della proprietà $R + R' = 2m$.

8. Il Sig. Bonnet ha dimostrato che per qualunque elicoide le quantità u, v, w sono funzioni di u soltanto e reciprocamente: dunque le equazioni (15) per a e b qualunque rappresentano delle elicoidi. Volendo, potremmo ottenerne l'equazione in r, ω, ζ che è però complicata. Per $b = 0$, $m = 0$ le equazioni (15) danno l'elicoide gobba a piano direttore; si ha dunque (N.° 6) che le elicoidi (15), corrispondenti a $b = 0$, sono parallele all'elicoide gobba a piano direttore.

9. È facile vedere che fra le superficie $R + R' = 2m$ non vi sono altre elicoidi che quelle rappresentate dalle equazioni (15). Infatti in una superficie del genere elicoidale, u, v, w sono funzioni di y soltanto, quindi ζ è tale che

$$\frac{d\zeta}{dx} = a,$$

a essendo una costante.

Nel nostro caso

$$\zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy) - mi \operatorname{tang} iy;$$

si dovrà dunque avere

$$f'(x + iy) + f'_1(x - iy) = a;$$

e se si pone

$$f'(x + iy) = \alpha + i\beta, \quad \text{sarà} \quad f'_1(x - iy) = a - \alpha - i\beta,$$

e α e β saranno costanti. Segue da ciò che ζ (trascurando le costanti) sarà della forma

$$\zeta = ax - 2\beta y - mi \operatorname{tang} iy,$$

che coincide colla terza delle equazioni (15).

Perchè una superficie abbia le linee di curvatura di un sistema in piani paralleli a quello delle (ζ, η) deve aversi $v = 0$, cioè $\frac{d\zeta}{dx} = 0$; segue da ciò che le superficie di rivoluzione aventi per meridiane le curve (15) sono le sole che abbiano un sistema di linee di curvatura in piani paralleli e che godano della proprietà

$$R + R' = 2m.$$

10. Essendo in qualunque elicoide u, v, w funzioni di y soltanto, e le linee $y =$ cost. essendo in questo caso le eliche, si ha che in qualunque elicoide l'integrazione delle equazioni delle linee di più gran pendenza, delle linee di curvatura,

delle asintoti che ec. ec. si riduce alle quadrature, e si ha inoltre che queste linee sono tutte tagliate sotto un angolo costante da una stessa elica. Quando si prendono a considerare le superficie $R + R' = 2m$, si trovano le proprietà delle linee di più gran pendenza e delle asintotiche soltanto nel caso delle elicoidi: non si ha dunque in ciò nulla di nuovo.

11. Trattandosi delle linee di curvatura, si ha che la loro equazione può integrarsi per tutte le superficie $R + R' = 2m$. Essa infatti è stata data dal Sig. Bonnet per qualunque superficie sotto la forma

$$(19) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{u - w}{v}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

e nel nostro caso, per le formole (14) diviene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2i\frac{f_1'(x - iy) - f'(x + iy)}{f'(x + iy) + f_1'(x - iy)}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

che ponendo

$$x + iy = x_1, \qquad x - iy = y_1$$

si riduce all' altra

$$\int\sqrt{f'(x_1)}\,dx_1 = \pm i\int\sqrt{f'(y_1)}\,dy_1 + C.$$

Questa equazione è indipendente da m, ed è perciò la stessa di quella che si ha per le superficie di minima estensione. È evidente d' altronde (N. 6) che non deve essere altrimenti.

12. Chiamando θ l' angolo delle linee di curvatura con quelle di più gran pendenza, si ha in generale

$$(20) \qquad \tang 2\theta = \frac{2v}{w - u},$$

e per le superficie $R + R' = 2m$

$$(21) \qquad \tang 2\theta = \frac{\frac{d\zeta_1}{dx}}{\frac{d\zeta_1}{dy}}$$

che è indipendente da m: e per le superficie elicoidali $R + R' = 2m$, si ha

$$(22) \qquad \tang 2\theta = \frac{a}{b}:$$

se ne conclude che *nelle superficie elicoidali per le quali* $R + R' = 2m$, *l' angolo*

sotto cui le linee di curvatura tagliano quelle di più gran pendenza è costante ed indipendente da m.

Per $b = 0$, $\theta = 45°$: dunque *nelle elicoidi parallele all' elicoide gobba a piano direttore le linee di curvatura tagliano quelle di più gran pendenza sotto angoli di 45°.*

Osservando che *in qualunque superficie le linee di curvatura dividono per metà l' angolo delle linee asintotiche,* si vedrà che il teorema precedente dà luogo all' altro che ci dice che *nelle elicoidi parallele all' elicoide gobba a piano direttore le due linee asintotiche sono egualmente inclinate sulle linee di più gran pendenza e su quelle di livello.*

13. È facile di vedere che *fra le superficie* $R + R' = 2m$ *le elicoidi sono le sole superficie che godano delle proprietà che le loro linee di curvatura taglino quelle di più gran pendenza sotto angoli costanti.* Infatti la equazione (21) ci mostra che per tali superficie deve aversi

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = h.\frac{d\zeta_1}{dy},$$

con h costante. Sarà dunque per la formola (8).

$$f'(x+iy) = \left\{\frac{h^2-1}{1+h^2} - \frac{2hi}{1+h^2}\right\} f_1'(x-iy);$$

per cui se si pone

$$f'(x-iy) = \alpha - i\beta,$$

sarà

$$f'(x+iy) = \frac{h^2-1}{1+h^2}\alpha + \frac{2h}{1+h^2}\beta + i\left\{\frac{1-h^2}{1+h^2}\beta - \frac{2}{1+h^2}\alpha\right\},$$

e per la teoria delle funzioni di una variabile complessa α e β saranno costanti, ciò che porta che ζ_1 avrà appunto la forma $ax + by$.

14. È facile pure di vedere che *le elicoidi* $R + R' = 2m$ *sono le sole superficie del genere elicoidale che godano della proprietà che le loro linee di curvatura taglino quelle di più gran pendenza sotto angoli costanti.*

Infatti il Sig. Bonnet ha dimostrato che per le superficie elicoidali si ha

$$u = Y, \qquad v = a\cos iy, \qquad w = \frac{Y'}{i\,\text{tang}\, iy},$$

essendo Y una funzione qualunque di y, Y' la sua derivata, ed a una costante. Per le elicoidi per le quali la proprietà (22) ha luogo, deve dunque aversi, per

la (20) $$Y' \cos iy - iY \operatorname{sen} iy = 2bi \operatorname{sen} iy \cos iy\,,$$

essendo b una costante. Integrando si ottiene

$$Y \cos iy = -b \cos^2 iy + C$$

e perciò

$$u = -b \cos iy + \frac{C}{\cos iy}\,,$$

essendo C una costante. Ne segue che $w = b \cos iy + \frac{C}{\cos iy}$, e con ciò resta provato quanto volevamo.

Segue di qui che le elicoidi parallele all'elicoide gobba a piano direttore sono le sole elicoidi che godano delle proprietà espresse nei teoremi secondo e terzo del num. 12.

15. Se poi si prende a considerare l'equazione

$$(23) \qquad w dy^2 + 2v dy dx + u dx^2 = 0$$

delle linee asintotiche, e si osserva che questa equazione è soddisfatta da $y =$ cost. soltanto per $u = 0$, ciò che nel caso delle elicoidi porta anche $w = 0$, se ne concluderà che *l'elicoide gobba a piano direttore è la sola elicoide nella quale le eliche formino un sistema di linee asintotiche.*

16. Consideriamo ora le linee *isometriche,* quelle cioè che dividono la superficie in quadrati infinitamente piccoli. La determinazione di queste linee dipende, in generale, dalla integrazione delle equazioni

$$(24) \qquad \begin{cases} (u + iv)\, dx + (v + iw)\, dy = 0\,, \\ (u - iv)\, dx + (v - iw)\, dy = 0\,, \end{cases}$$

e se $\alpha + i\beta$ è il fattore che rende integrabile la prima di queste equazioni, le linee dei due sistemi vengono rappresentate dalle equazioni

$$(25) \qquad \begin{cases} (\alpha u - \beta v)\, dx + (\alpha v - \beta w)\, dy = 0\,, \\ (\alpha v + \beta u)\, dx + (\alpha w + \beta v)\, dy = 0. \end{cases}$$

E chiamando λ e λ_1 gli angoli delle linee del primo e del secondo sistema con quelle di più gran pendenza, si ha

$$(26) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}\,, \\ \operatorname{tang} \lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Ciò posto osserviamo che per le elicoidi, le quantità u, v, w essendo funzioni della sola y, il fattore che rende integrabile la prima delle equazioni (24) è

$$\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{iv}{u^2+v^2},$$

e le equazioni (25) divengono perciò in questo caso

$$(27)\qquad \begin{cases} dx+\dfrac{v\,(u+w)}{u^2+v^2}\,dy=0,\\ y=\text{cost.}\end{cases}$$

Si ha dunque che *in qualunque elicoide le eliche e le loro trajettorie ortogonali* (che sono una serie di linee geodetiche) *formano un doppio sistema di linee isometriche.*

La prima delle equazioni (27) è l'equazione della serie di linee geodetiche dell'elicoide che sono ortogonali colle eliche.

Il teorema or dimostrato è anche conseguenza evidente di quello del Sig. Bour sulle superficie applicabili sulle elicoidi.

16. Per le superficie $R+R'=2m$ le equazioni delle linee isometriche sono integrabili soltanto nel caso delle elicoidi. Non si ha dunque nulla di nuovo. Ma considerando le elicoidi parallele all'elicoide gobba a piano direttore, le equazioni (26) ci danno

$$\operatorname{tang}\lambda=-\frac{a\cos^2 iy}{m},\qquad \operatorname{tang}\lambda_1=\frac{m}{a\cos^2 iy},$$

e se si chiama μ l'angolo che i meridiani fanno colle linee di più gran pendenza, si ha in generale

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{v}{w};$$

quindi, per le elicoidi in questione,

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{a\cos^2 iy}{m},$$

e perciò $\mu=-\lambda$; se ne conchiude che *nelle elicoidi parallele alla elicoide gobba a piano direttore, i meridiani e le trajettorie ortogonali delle eliche sono egualmente inclinate sulle linee di più gran pendenza.*

Se φ è l'angolo delle eliche colle linee di più gran pendenza, si ha di qui che l'angolo dei meridiani colle eliche è $-2\varphi-\frac{\pi}{2}$.

17. La ricerca delle superficie $R+R'=2m$ che hanno tutte le loro linee di curvatura piane, rientra in quella delle superficie di area minima che godono della stessa proprietà, e che è stata fatta dal Sig. Bonnet. Io per questo non me ne occuperò.

Terminerò cercando le superficie $R+R'=2m$ che passano per due rette date, restringendomi però al caso in cui esse siano parallele. Supponiamo che l'una delle rette si confonda coll'asse delle y, e che l'altra sia situata nel piano parallelo a quello delle (ξ, η) che ha per equazione $\zeta = h$; avremo per qualunque valore di y

$$\zeta = 0 \quad \text{per} \quad x = 0\,, \qquad \zeta = h \quad \text{per} \quad x = k\pi\,,$$

essendo k un numero intero dato.

Poniamo ora il valore generale di ζ sotto la forma

$$\zeta = \frac{1}{2}\Big[\varphi(y+ix) + \varphi(y-ix)\Big] + \frac{i}{2}\Big[\varphi_1(y+ix) - \varphi_1(y-ix)\Big] - mi\,\mathrm{tang}\, iy.$$

La prima condizione richiede che si abbia

$$\varphi(y) = mi\,\mathrm{tang}\, iy\,,$$

per qualunque valore di y, quindi sarà

$$\varphi(y+iy) = mi\,\mathrm{tang}(iy - x)\,,$$

e per conseguenza

$$\zeta = \frac{mi\,\mathrm{tang}\, iy\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 iy - \mathrm{sen}^2 x} + \frac{i}{2}\Big[\varphi_1(y+ix) - \varphi_1(y-ix)\Big].$$

Per determinare φ_1 osserveremo che per $x = k\pi$ deve aversi $\zeta = h$, per cui sarà

$$h = \frac{i}{2}\Big[\varphi_1(y+ik\pi) - \varphi_1(y-ik\pi)\Big],$$

che, integrata colle differenze finite, dà

$$\varphi_1(z) = -\frac{h}{k\pi}z + \varphi_2(z)\,,$$

essendo $\varphi_2(z)$ una funzione periodica che ha per periodo $2ik\pi$, cioè essendo

$$\varphi_2(z) = \sum A_p e^{\frac{pz}{k}}\,,$$

ove la sommazione $\sum$ deve intendersi estesa a tutti i valori intieri di p.

Si avrà dunque per la superficie ricercata

$$(28) \qquad \zeta = \frac{mi\,\mathrm{tang}\, iy\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 iy - \mathrm{sen}^2 x} + \frac{h}{k\pi}x + \sum A_p e^{\frac{p}{k}y}\,\mathrm{sen}\frac{p}{k}x\,.$$

Se la superficie deve passare anche per un altra retta tale che $\zeta = h'$ per $x = k'\pi$, ove k' è un numero intero, dovremo avere per tutti i valori di y

$$(29) \qquad h' = \frac{hk'}{k} + \sum A_p e^{\frac{p}{k}y} \operatorname{sen} \frac{p}{k} k'\pi ;$$

e se si ha $\frac{h}{h'} = \frac{k}{k'}$, e se $\frac{n}{n'}$ è la frazione irriducibile equivalente a $\frac{k}{k'}$, si soddisferà alla equazione precedente prendendo per p tutti i multipli di n. Giungeremmo a conclusioni analoghe se la superficie dovesse contenere un maggior numero di rette.

Supponendo nella equazione (28) $A_p = 0$, si ottiene la superficie che ha per equazione

$$(30) \qquad \zeta = \frac{mi \operatorname{tang} iy \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 iy - \operatorname{sen}^2 x} + \alpha x ,$$

ove α è costante, e che soddisfa essa pure all'equazione $R + R' = 2m$, e contiene un numero infinito di rette tutte parallele fra loro e corrispondenti ai valori di $x = \lambda\pi$, ove λ è una quantità qualunque.

È da osservarsi ancora che noi abbiamo ottenuto soltanto delle superficie che passano per rette parallele a rette date, talchè dobbiamo determinare le costanti C,C' che entrano nel valore di z in modo che le rette date abbiano ciascuna un punto sulla superficie. Queste costanti sono soltanto due; perciò quando le rette sono più di due, avremo delle equazioni di condizione.

La quantità che nei paragrafi precedenti abbiamo chiamata ζ_1, per la superficie (28) è data dalla formola

$$\zeta_1 = \frac{mi \operatorname{sen} iy \cos iy}{\cos^2 iy - \operatorname{sen}^2 x} + \frac{h}{k\pi} + \sum A_p e^{\frac{p}{k}y} \operatorname{sen} \frac{p}{k} x.$$

Parigi 14 Aprile 1865.



SULL'USO DEI DETERMINANTI

PER RAPPRESENTARE LA SOMMA

DELLE POTENZE INTERE

DEI NUMERI NATURALI.

NOTA

DI F. SIACCI

Sia il determinante

$$P_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m & m+1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & \ldots & \frac{m(m-1)}{1.2.} & \frac{(m+1)m}{1.2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} & \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & m & \frac{(m+1)m}{1.2} \\ z & z^2 & z^3 & z^4 & \ldots & z^m & z^{m+1} \end{vmatrix}$$

All'ultima orizzontale aggiungendo la 1^a, la 2^a, la 3^a, ... l'*ennesima*, rispettivamente moltiplicate per z^0, z^1, z^2.... z^{m-1}, si ottiene

$$P_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m & m+1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & \ldots & \frac{m(m-1)}{1.2} & \frac{(m+1)m}{1.2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} & \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (z+1) & (z+1)^2 & (z+1)^3 & (z+1)^4 & \ldots & (z+1)^m & (z+1)^{m+1}-(m+1)z^m \end{vmatrix}$$

ovvero

$$P_z = P_{z+1} - 1.2.3.4 \ldots . m(m+1)\, z^m.$$

Quindi si avrà

$$P_{z+1} = P_{z+2} - 1.2.3 \ldots (m+1)(z+1)^m$$

$$P_{z+2} = P_{z+3} - 1.2.3 \ldots (m+1)(z+2)^m$$

$$P_{z+3} = P_{z+4} - 1.2.3 \ldots (m+1)(z+3)^m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{z+n} = P_{z+n+1} - 1.2.3 \ldots (m+1)(z+n)^m;$$

e perciò sommando, e fatto $z = 0$, si avrà

(1) $$P_{n+1} = 1.2.3 \ldots (m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \ldots . n^m).$$

Prima di cercare il valore esplicito di P_{n+1} osserviamo una sua curiosa proprietà.

Riprendo il determinante P_z, e pongo $-z$ in luogo di z.

Cambio il segno a tutte le verticali di sede dispari, e quindi all'ultima orizzontale aggiungo la prima, la 2^a, la 3^a, la m^a, moltiplicate rispettivamente per z^0, $-z$, z^2, $-z^3 \ldots \pm z^{m-1}$, ed otterrò

$$P_{-z} = P_{-(z-1)} \pm 1.2.3 \ldots (m+1)\, z^m$$

Il segno superiore vale quando m è impari, l'inferiore quando è pari. Perciò

$$P_{-z} = P_{-(z-1)} \pm 1.2.3 \ldots (m+1)\, z^m$$

$$P_{-(z-1)} = P_{-(z-2)} \pm 1.2.3 \ldots (m+1)(z-1)^m$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{-1} = P_0 \pm 1.2.3 \ldots . (m+1).\, 1^m$$

e sommando, cambiato z in n,

(2) $$\pm P_{-n} = 1.2.3 \ldots (m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \ldots n^m).$$

Confrontando questa formola colla (1) si ricava

$$P_{n+1} = \pm P_{-n},$$

od anche

(3) $$P_n = \pm P_{-(n+1)}$$

Così la somma dei numeri cubi è espressa da

$$\frac{n^2 (n+1)^2}{4},$$

che non cambia nè di segno nè di valore se pongasi $-(n+1)$ in luogo di n. La somma delle quarte potenze dei numeri naturali è

$$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

e questa formola cambia di segno, ma non di valore, ponendo $-(n+1)$ invece di n. E così via discorrendo.

Per determinare il valore generale di P_n, scrivo primieramente il determinante P_n come segue

$$P_n = \begin{vmatrix} n^{m+1} & n^m & n^{m-1} & \cdot\ \cdot & n \\ \frac{(m+1)m}{1.2} & \frac{m}{1} & 0 & \cdot\ \cdot & 0 \\ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} & \frac{m(m-1)}{1.2} & \frac{m-1}{1} & \cdot\ \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot\ \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Moltiplico quindi la 2.ª colonna per $(m+1)$, la 3.ª per $(m+1)m$... l'ultima per $(m+1)\ldots 3.2$; divido in seguito la 2.ª linea per $(m+1)m$, la 3.ª per $(m+1)\,m\,(m-1)$, . . . l'ultima per $(m+1)\,m$ . . . 3.2.1. Otterrò

$$P_n = 1.2.3\ldots m \begin{vmatrix} n^{m+1} & (m+1)n^m & (m+1)m.n^{m-1} & \cdot\ \cdot & (m+1)m\ldots 3.2.\,n \\ \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & \cdot\ \cdot & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{1}{1.2.3\,(m+1)} & \frac{1}{1.2\ldots m} & \frac{1}{1.2\ldots(m-1)} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{1} \end{vmatrix}$$

Siano ora

$$1,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots\ldots\quad A_r,\quad \ldots,\quad A_m.$$

i complementi algebrici degli elementi della prima linea del determinante del secondo membro. Si avrà per una proprietà fondamentale dei determinanti

$$(4)\quad \frac{P_n}{1.2.3\ldots m} = n^{m+1} + (m+1)A_1 n^m + (m+1)m\,A_2 n^{m-1} \ldots\ (m+1)m(m-1)\ 3.2.1.\,A_m n$$

$$
(5)\quad\left\{\begin{array}{l}
0 = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1} A_1 \\[2ex]
0 = \dfrac{1}{1.\,2.\,3} + \dfrac{1}{1.2} A_2 + \dfrac{1}{1} A_2 \\[2ex]
0 = \dfrac{1}{1.2.3.4} + \dfrac{1}{1.2.3} A_1 + \dfrac{1}{1.2} A_2 + \dfrac{1}{1} A_3 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
0 = \dfrac{1}{1.2.3\ldots r+1} + \dfrac{1}{1.2.3\ldots r} A_1 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{1} A_r
\end{array}\right.
$$

Ora le equazioni (5) sono le equazioni di condizione affinchè il prodotto

$$
\left[1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \ldots\right]\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \frac{x^r}{1.2.3} + \ldots\right]
$$

sia eguale ad x. Perciò si avrà

$$
\frac{x}{e^x - 1} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \quad \ldots\ldots \quad (*)
$$

(*) Questo metodo può servire a trovare il valore di alcune specie di determinanti. Per esempio il Sig. Enrico D'Ovidio (Giornale di matematiche di Napoli, 1863; pag. 137) ha provato che

$$
P_n = \left|\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\[1ex]
\frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 1 & 0 & . & . & 0 \\[1ex]
\frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 1 & . & . & 0 \\[1ex]
. & . & . & . & . & . & . \\[1ex]
\frac{1}{1.2.3..n} & \frac{1}{1.2..n-1} & \frac{1}{1.2..n-2} & \frac{1}{1.2..\ n-3} & . & . & \frac{1}{1}
\end{array}\right| = \frac{1}{1.2.3\ldots n}
$$

Ora è evidente che i determinanti che si ottengono facendo successivamente

$$
n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots
$$

sono i complementi aritmetici degli elementi 2.° 3.° 4°. . . . della prima linea del determinante

$$
f(x) = \left|\begin{array}{ccccc}
1 & -x & x^2 & -x^3 & . \\[1ex]
\frac{1}{1} & 1 & 0 & 0 & . \\[1ex]
\frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 1 & 0 & . \\[1ex]
\frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 1 & . \\[1ex]
. & . & . & . & .
\end{array}\right|
$$

Ora è facile dimostrare che

$$A_3 = A_5 = A_7 = \ldots. A_{2r-1} = 0.$$

Infatti dalla prima delle (5) si ha $A_1 = -\frac{1}{2}$. Perciò portando al primo membro il 2.° termine della serie, si vede che tutti i termini contenenti potenze impari di x devono svanire perchè la funzione

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}x = x\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

non cambia nè di valore nè di segno, cambiando x in $-x$. Inoltre è noto che dinotando con B_1 B_3 B_5 ... i numeri Bernulliani si ha generalmente

$$B_{2r-1} = 1.2.3\ldots 2r\, A_{2r}.$$

Quindi si avrà

$$(6)\quad \frac{P_{n+1}}{1.2.3\ldots m(m+1)} = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots . (n-1)^m + n^m$$

$$= \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \frac{(n+1)^m}{2} + \frac{m}{1.2}B_1(n+1)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}B_3(n+1)^{m-3} + \ldots$$

Questa espressione, quantunque molto somigliante a quella data dal *Cauchy* ne'suoi *Résumés analytiques* (pag. 72), e riportata nel *Trattato d'Algebra* del *Novi*, parte prima, p. 177, si presenta sotto una forma diversa. Si passa però dall'una all'altra sostituendo [in virtù della formola (3)], $-(n+1)$ in luogo di n, tenuto conto del cambiamento di segno quando n'è il caso. (*)

Quanto ai numeri Bernulliani la loro espressione generale è stata data dall'Eulero, e dal Laplace. Il prof. Genocchi in una Nota inserita negli An-

---

Onde si ha

$$f(x) = 1 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots$$

$$0 = \frac{1}{1} - P_1$$

$$0 = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1}P_1 + P_2$$

$$0 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2}P_1 + \frac{1}{1}P_2 - P_3;$$

ora queste sono le condizioni perchè $f(x)$ sia eguale ad $e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \text{ecc.}}$

Perciò

$$P_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Inversamente il metodo dei coefficienti indeterminanti può servire a trovare i coefficienti di una serie espresso per determinanti.

(*) Veggasi una mia nota sulla somma delle potenze intere dei numeri naturali inserita in questi Annali (1861. Genn. e Febb.)

nali di Scienze Matematiche e Fisiche del prof. Tortolini (Settembre 1852), l'ha ricavata dai coefficienti della funzione

$$\frac{2x}{e^{2x}-1},$$

sviluppata in serie, ed ha trovato

$$B_r = \frac{r+1}{2^{r+1}-1}\,\frac{1}{2^m}\Bigg[\frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(2^r-1)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(3^r-2^r+1)$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}(4^r-3^r+2^r-1)+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^m\Big((m-1)^r-(m-2)^r+(m-3)^r-\ldots\pm 1\Big)\Bigg],$$

ove m è un numero qualunque maggiore di r.

I complementi A_2 A_4 A_6 . . . A_{2r} trovati di sopra possono servire ad esprimere i numeri Bernulliani B_1, B_3 . . . B_{2r-1} per mezzo di determinanti. Si avrebbe infatti

$$B_{2r-1} = 1.2.3\ldots 2r \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & . & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & . & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & . & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \frac{1}{1.2.3\ldots(2r+1)} & \frac{1}{1.2\ldots 2r} & \frac{1}{1.2\ldots 2r-1} & \frac{1}{1.2\ldots 2r-2} & . & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix}.$$



SOPRA ALCUNI PUNTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE APPLICABILI (*)

NOTA

DI ULISSE DINI

Nel lavoro che vado ad esporre considererò dapprima le superficie di curvatura costante negativa, e dimostrerò un teorema su esse. Prenderò in secondo luogo a studiare le superficie sviluppate di quelle di curvatura costante, con che verrò a determinare la classe di superficie applicabili su quelle di area minima, sulle quali dimostrerò pure alcuni teoremi. Considerando poi le superficie sviluppate di quelle per le quali il rapporto dei due raggi di curvatura principale è costante darò una classe di superficie di rivoluzione tutte algebriche e dello stesso ordine (il sesto) applicabili l' una sull' altra. Farò in ultimo conoscere alcune superficie applicabili sulla ellissoide schiacciata di rivoluzione, sulla iperboloide gobba di rivoluzione e sulla paraboloide ellittica pure di rivoluzione.

La superficie che qui chiamo, col Sig. Bonnet, sviluppate di un altra sono quelle luogo dei centri di curvatura di quest' ultima.

Superficie a curvatura costante negativa.

1. Il Sig. Liouville e in seguito il Sig. Codazzi hanno preso a studiare le superficie di curvatura costante $\pm\frac{1}{a^2}$, e hanno dimostrato che quelle di curvatura positiva $\frac{1}{a^2}$ sono applicabili tutte sulla sfera di raggio a, mentre quelle di curvatura negativa $-\frac{1}{a^2}$ sono applicabili sulla superficie di rivoluzione che ha per meridiana la curva delle tangenti di lunghezza costante a. Adesso che il Sig. Bour ha dimostrato il teorema che « esiste sempre una certa elicoide applicabile sopra una super-

(*) Da questo lavoro sono estratti i teoremi che ho avuto l' onore di presentare all'Accademia delle Scienze di Parigi nella seduta del 13. Febbrajo 1865. (V. Comptes Rendus, tom. LX. P. 340.)

ficie di rivoluzione data » possiamo spingere più oltre gli studj sulle superficie di curvatura costante, e possiamo proporci (come io qui faccio) la ricerca se non di tutte, almeno di alcune fra le elicoidi di questa classe di superficie. Ma prima di fare questa ricerca sarà utile che io richiami la dimostrazione del teorema del Signor Bour.

2. Si chiama *superficie elicoidale* la superficie generata da un profilo, di forma qualunque, situato nel piano meridiano di un cilindro di rivoluzione, e moventesi, senza cangiare di forma, in modo che i suoi punti descrivano delle eliche dello stesso passo, e situate fra cilindri dello stesso asse.

Ciò posto, prendiamo per asse delle z l'asse del cilindro, e per assi delle x e y due diametri ortogonali della base; prendiamo inoltre per coordinate ρ ed ω sull'elicoide le eliche e le curve secondo le quali essa è tagliata dai piani meridiani del cilindro. Potremo evidentemente rappresentare questa superficie colle equazioni

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \,\text{sen}\, \omega, \qquad z = m\omega + \varphi(\rho),$$

ove m è una costante eguale al passo delle eliche diviso per 2π, e $\varphi(\rho)$ una funzione che determina la forma del profilo generatore.

Le coordinate ρ ed ω non sono ortogonali, come si vede formando l'elemento lineare ds^2; per questo introdurremo il parametro v delle curve ortogonali colle eliche, e prenderemo per coordinate ρ e v. Allora dovendo considerare ω come funzione di ρ e v avremo

$$ds^2 = \left\{ 1 + (\rho^2 + m^2)\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2 + \varphi'(\rho)^2 + 2m\,\varphi'(\rho)\frac{d\omega}{d\rho} \right\} d\rho^2 - 2\frac{d\omega}{d\rho}\left\{ (\rho^2 + m^2)\frac{d\omega}{d\rho} + m\,\varphi'(\rho) \right\} d\rho dv + \left(\frac{d\omega}{dv}\right)^2 (\rho^2 + m^2)\, dv^2.$$

E poichè le curve ρ ed v sono ortogonali, ed ω deve evidentemente contenere v, sarà

$$(1) \qquad (\rho^2 + m^2)\frac{d\omega}{d\rho} + m\,\varphi'(\rho) = 0.$$

Integrando questa equazione si avrà ω che dovrà contenere una funzione arbitraria di v, che prenderemo uguale a kv. Avremo perciò

$$(2) \qquad ds^2 = \left\{ 1 + \frac{\rho^2 \varphi'(\rho)^2}{\rho^2 + m^2} \right\} d\rho^2 + k^2(\rho^2 + m^2)\, dv^2,$$

per la forma dell'elemento lineare delle elicoidi.

Ponendo

$$\sqrt{1+\frac{\rho^2\varphi'(\rho)^2}{\rho^2+m^2}}\,d\rho = du\,,$$

si avrà

$$\rho = \psi(u) \qquad \text{e} \qquad ds^2 = du^2 + F(u)\,dv^2,$$

e poichè questa forma conviene anche alle superficie di rivoluzione, il teorema è dimostrato.

Questa dimostrazione è quella data dal Sig. Bertrand nel suo eccellente trattato di Calcolo Differenziale.

3. Osserviamo di passaggio che queste formole ci mostrano che nelle elicoidi le trajettorie ortogonali delle eliche sono linee geodetiche, e se ne conclude perciò che *nelle elicoidi non sviluppabili le eliche non possono essere mai linee geodetiche.*

Queste formole ci mostrano ancora che nelle elicoidi le eliche sono le linee di egual curvatura, e se ne conclude per ciò che *se due elicoidi, di curvatura non costante, sono applicabili, le eliche dell'una vengono necessariamente a disporsi sulle eliche dell'altra.*

4. La forma (2) dell'elemento lineare delle elicoidi ci permette ora di passare alla ricerca di alcune fra le elicoidi a curvatura costante $\frac{1}{a^2}$.

Osserviamo perciò che l'elemento lineare delle superficie di curvatura costante può porsi sotto la forma

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}\,dv^2\,;$$

se dunque si pone

$$\cos^2\frac{u}{a} = k^2\rho^2 + k^2m^2,$$

si vedrà facilmente che, fra le elicoidi di curvatura costante vi sono quelle i cui profili $z=\varphi(\rho)$ soddisfanno all'equazione

$$\rho^2 + m^2 + \rho^2\varphi'(\rho)^2 = \frac{a^2k^2\rho^2}{1-k^2m^2-k^2\rho^2}\,; \tag{3}$$

Questi profili sono dunque in numero infinito poichè k ed m sono arbitrarii, e si determinerebbero integrando questa equazione.

5. Pel caso di a reale si avrebbero delle elicoidi applicabili sulla sfera, ma noi

in questo caso osserveremo soltanto che ponendo.

$$k^2m^2 = 1 \,, \qquad m^2 = -a^2 \,,$$

si ottiene

$$z = \pm \rho \sqrt{-1} + C$$

la quale ci mostra che esistono due elicoidi rigate immaginarie applicabili sulla sfera, nelle quali le generatrici rettilinee sono parallele agli asintoti di un circolo, e il passo delle eliche è $2\pi a i$, a essendo il raggio della sfera. Queste due elicoidi hanno una linea reale (l'asse delle z). Esse però a parlare propriamente, non differiscono l'una dall'altra.

6. Pel caso di a immaginario la equazione (3) diverrà

$$\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'(\rho)^2 = \frac{a^2k^2\rho^2}{k^2\rho^2 + k^2m^2 - 1} \,,$$

e integrata darebbe l'equazioni dei profili generatori di un numero infinito di elicoidi di curvatura costante negativa. Io non mi occuperò dell'integrazione di quella equazione nel caso generale, ma soltanto considererò le elicoidi reali che si ottengono quando fra k ed m si stabilisca la relazione

$$k^2m^2 = 1 \,,$$

la quale lascia sempre una delle due quantità k e m p. es. m, arbitraria, e soltanto minore di a. In questo caso si ottiene la equazione

$$\rho^2 \{1 + \varphi'(\rho)^2\} = a^2 - m^2 ,$$

la quale ci mostra che le curve che, nel caso attuale, costituiscono i profili generatori delle elicoidi di curvatura $-\frac{1}{a^2}$, sono quelle che hanno le tangenti di lunghezza costante ed eguale a $\sqrt{a^2 - m^2}$.

Indicando dunque con h il passo delle eliche, si potrà enunciare questo teorema: *Fra le elicoidi di curvatura costante negativa* $-\frac{1}{a^2}$ *vi sono quelle il cui profilo generatore è una curva delle tangenti di lunghezza costante* $\sqrt{a^2 - \frac{h^2}{4\pi^2}}$, *$h$ essendo il passo comune delle eliche descritte dai differenti punti del profilo. Le elicoidi corrispondenti a tutti i valori di h compresi fra zero e $2\pi a$, e che sono*

per conseguenza in numero infinito, hanno tutte la stessa curvatura $-\frac{1}{a^2}$, *e sono tutte applicabili.*

Questo teorema mi sembra assai rimarchevole, giacchè la superficie di rivoluzione tipo di quelle di curvatura costante negativa ha appunto per meridiano una curva dalle tangenti di lunghezza costante a. Essa non è che l'elicoide del teorema precedente corrispondente ad $h = 0$.

7. Su questa curva dalle tangenti costanti osserverò ancora che *la superficie di rivoluzione da essa generata gode della proprietà che tutti i suoi paralleli hanno la stessa curvatura geodetica, e che essa è la sola superficie di rivoluzione che gode di questa proprietà.* Ciò risulta subito dalla definizione della curvatura geodetica.

Superficie sviluppate di quelle di curvatura costante.

Il Sig. Weingarten (*) ha dimostrato che essendo ρ e ρ' i due raggi di curvatura principale di una superficie si ha il teorema: « Il sistema delle sviluppate corrispondenti al raggio di curvatura ρ di una famiglia di superficie caratterizzata dalla equazione $\rho' = \varphi(\rho)$, costituisce una classe completa di superficie applicabili l'una sull'altra, e di cui una superficie di rivoluzione che dipende dalla funzione φ può essere riguardata come tipo: » Fa soltanto eccezione il caso nel quale fra ρ e ρ' si verifica la relazione $\rho\rho' = \text{cost}$, nel qual caso, per avere una classe completa di superficie applicabili bisogna unire alle sviluppate delle superficie di curvatura costante le superficie gobbe il cui elemento lineare può porsi sotto la stessa forma che quello delle medesime sviluppate.

Servendomi di questo teorema io considererò ora le superficie sviluppate di quelle per le quali si ha

$$\rho\rho' = a^2,$$

ove a è una costante reale o immaginaria.

9. Osserviamo che pel teorema del Sig. Weingarten, l'elemento lineare delle superficie sviluppate di quelle per le quali si ha $\rho' = \varphi(\rho)$, può porsi sotto la forma

$$(1) \qquad ds^2 = d\rho^2 + e^{2\int \frac{d\rho}{\rho - \varphi(\rho)}} dv^2 \quad (**)$$

(*) V. Giornale di Crelle tom. 59.

(**) È assai singolare la formola $-\frac{\varphi'(\rho)}{\{\rho - \varphi(\rho)\}^2}$ che dà la curvatura di queste sviluppate, non che

dunque pel caso in questione si avrà

$$(2) \qquad ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 - a^2)\, dv^2.$$

A questa forma nel caso di a reale, si riduce pure l'elemento lineare delle superficie sviluppate di quelle per le quali si ha $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{a}$: è ben chiaro d'altronde che ciò deve avvenire, poichè le superficie di curvatura costante positiva $\frac{1}{a^2}$, sono parallele a quelle di curvatura media costante $\frac{1}{a}$.

10. Passiamo ora alla ricerca delle superficie di rivoluzione il cui elemento lineare può porsi sotto la forma (2). Osserviamo perciò che prendendo per coordinate sopra una superficie i meridiani, e i paralleli, e essendo ρ l'arco del meridiano, e v quello del parallelo fisso di raggio arbitrario α, si ha

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{r^2}{\alpha^2} dv^2,$$

ove r è il raggio d'un parallelo qualunque. Per le superficie che noi cerchiamo dovrà dunque aversi

$$(3) \qquad r^2 = \alpha^2 (\rho^2 - a^2);$$

E poichè se r è l'asse di rivoluzione, si ha $\frac{dz^2}{d\rho^2} + \frac{dr^2}{d\rho^2} = 1$, si avrà per l'equazione delle curve meridiane delle superficie in questione

$$(4) \qquad \frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{r^2}{\alpha^2 (r^2 + a^2\alpha^2)} - 1}$$

Queste superficie saranno in numero infinito, poichè α è arbitrario.

11. Distinguiamo ora i due casi di a reale e di a immaginaria:

1.° Caso: a reale: In questo caso si hanno le superficie di rivoluzione contenute nel sistema di sviluppate delle superficie di curvatura costante positiva, e applicabili

---

l'altra $\frac{1}{\varphi(\rho) - \rho}$ che dà la curvatura geodetica delle linee $\rho =$ cost cioè delle linee d'intersezione della sviluppata colla superficie formata dalle normali alla superficie primitiva lungo le linee per le quali il raggio di curvatura principale ρ è costante.

È ancora da osservare che supponendo $\varphi(\rho) =$ cost, si ottiene subito il teorema che ci dice che; *La superficie sviluppata di qualunque superficie canale è una superficie sviluppabile.*

su queste sviluppate; l'equazione delle curve meridiane è la stessa (4) o l'altra

$$\frac{(r^2+a^2\alpha^2)\left\{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right\}}{r^2}=\frac{1}{\alpha^2}, (\alpha<1),$$

la quale ci mostra facilmente che, in queste curve, se si conduce la tangente MF, e la normale MN, e si prende $PQ = a\alpha$, la linea FH sta al raggio MP del parallelo in un rapporto costante $\frac{1}{\alpha}$.

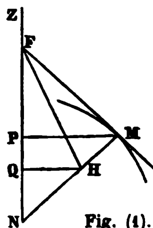


Fig. (1).

12. Consideriamo ora il caso di a immaginaria, il quale ci condurrà a dei risultati più rimarchevoli.

In questo caso l'elemento lineare delle superficie sviluppate di quelle per le quali si ha

$$\rho\rho' = -a^2,$$

prende la forma

$$(5) \qquad ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)\, dv^2,$$

e la equazione delle curve meridiane delle superficie di rivoluzione comprese in questo sistema di sviluppate diviene

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{r^2}{\alpha^2(r^2 - a^2\alpha^2)} - 1},$$

ovvero

$$(6) \qquad \frac{(r^2 - a^2\alpha^2)\left\{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right\}}{r^2} = \frac{1}{\alpha^2},$$

la quale mostra subito una proprietà geometrica di quelle curve.

In questo caso α può ricevere tutti i valori reali, e per $\alpha = 1$, si ottiene la curva

$$(7) \qquad \frac{dz}{dr} = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

ovvero

$$r^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = a^2\left\{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right\},$$

la quale ci mostra che, nella curva corrispondente, se si prende $PQ = a$ (Fig. 1) e pel punto Q si conduce una parallela alla normale, la parte di questa retta com-

presa fra l' asse e l'ordinata sarà costantemente eguale alla parte di asse compresa fra l' ordinata e la tangente.

13. L' integrazione dell' equazione (6) dipende dalle funzioni ellittiche, ma quella della equazione (7) si fa immediatamente. Si ottiene da essa

$$r = a \cosh. \frac{1}{a},$$

che è l' equazione di una catenaria avente per direttrice l' asse delle z. E ricordando ora che la superficie di rivoluzione avente per meridiana una catenaria è di area minima se ne conchiude il teorema che: *La classe delle superficie applicabili su quella di rivoluzione di area minima è costituita delle superficie sviluppate di quelle di curvatura costante negativa*, e (per il teorema di Weingarten) *delle superficie gobbe il cui elemento lineare prende la forma*

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)\, dv^2,$$

e che si sanno completamente determinare. Quando dunque saranno conosciute le superficie di curvatura costante negativa, potremo dire di conoscere del tutto anche la classe di superficie applicabili su quelle di area minima.

14. Passiamo ora alla ricerca delle elicoidi applicabili sulle sviluppate delle superficie $\rho\rho' = -a^2$, cioè a dire sulle superficie di area minima.

L' elemento lineare di un elicoide di cui $z = \varphi(u)$ è il profilo generatore, si può porre (N°. 2) sotto la forma

$$ds^2 = \left\{ 1 + \frac{u^2 \varphi'(u)^2}{u^2 + m^2} \right\} du^2 + k^2 (u^2 + m^2)\, dv^2$$

essendo sempre $2\pi m$ il passo delle eliche, e k una costante arbitraria.

Le elicoidi che cerchiamo sono quelle il cui elemento lineare può porsi sotto la forma (5); se dunque poniamo

$$\rho^2 + a^2 = k^2 (u^2 + m^2),$$

la funzione φ che dà i profili generatori, delle elicoidi cercate, dovrà determinarsi mediante l' integrazione della equazione

$$1 + \frac{u^2 \varphi'(u)^2}{u^2 + m^2} = \frac{k^4 u^2}{k^2 u^2 + k^2 m^2 - a^2}; \tag{8}$$

In questa k ed m sono arbitrarie, e si hanno perciò un numero infinito di elicoidi applicabili sulle superficie di area minima.

L'integrazione generale di questa equazione è complicatissima, ed io non la farò che pel caso in cui si abbia

$$k^2 = \frac{a^2}{m^2},$$

con che verrò ad ottenere un numero sempre infinito di elicoidi, giacchè m resta arbitrario e soltanto compreso fra o e a.

In questo caso la equazione (8) ci dà facilmente

$$\varphi'(u) = \frac{\frac{a^2-m^2}{m^2}u}{\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2}u^2+a^2-m^2}} + \frac{a^2-m^2}{u\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2}u^2+a^2-m^2}},$$

donde si ottiene

$$(9)\quad z = \varphi(u) = \sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2}u^2+a^2-m^2} + \frac{\sqrt{a^2-m^2}}{m}\int\frac{du}{u\sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2}u^2+a^2-m^2}}$$

L'integrazione del secondo membro si fa subito ponendo $u = \frac{m}{t}$, e si ottiene così finalmente

$$z = \varphi(u) = \sqrt{\frac{a^2-m^2}{m^2}u^2+a^2-m^2} - \frac{\sqrt{a^2-m^2}}{m}\,\text{arc sen}\,h\frac{m}{u} + C,$$

per l'equazione di un numero infinito di curve che sono profili generatori di altrettante elicoidi applicabili sulle superficie di area minima.

Per $m = a$, si ottiene la elicoide gobba a piano direttore.

15. Fra le superficie gobbe applicabili su quelle a area minima ve ne sono un numero infinito che sono ben rimarchevoli. Esse sono le elicoidi generate da una retta che si muove appoggiandosi sopra una elica e facendo un angolo retto con questa elica, e un angolo costante qualunque colle generatrici del cilindro sul quale la elica è descritta.

Sia infatti ρ il raggio della elica data, di passo $2\pi m$, e α l'angolo costante che le generatrici della elicoide fanno colle generatrici del cilindro, e sia α' l'angolo che il piano meridiano del cilindro fa col piano che projetta la generatrice sul piano delle xy. Indicando con u la lunghezza della generatrice contata a partire dalla elica data, e con ω l'angolo del piano ZX col piano meridiano del cilindro di raggio ρ,

è chiaro che le equazioni della elicoide saranno

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \rho\cos\omega + u\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos(\omega+\alpha'),\\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\omega + u\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,(\omega+\alpha'),\\ z &= m\omega + u\cos\alpha, \end{aligned}\right.$$

per cui si avrà

$$(11)\qquad ds^2 = du^2 + 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha' + m\cot\alpha)\,du\,d\omega$$
$$+\left(u^2 + 2u\rho\frac{\cos\alpha'}{\mathrm{sen}\,\alpha} + \frac{\rho^2+m^2}{\mathrm{sen}^2\alpha}\right)\mathrm{sen}^2\alpha\,d\omega^2.$$

Ma osserviamo ora che le linee ω e u non sono che le generatrici e le eliche delle elicoidi; e siccome le eliche possono ottenersi portando sulle generatrici una lunghezza costante a partire dalla elica data, che è ortogonale colle generatrici, se ne conclude, per un noto teorema di Gauss, che le linee ρ ed ω sono ortogonali, e che quindi si ha

$$(12)\qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha' + m\cot\alpha = 0:$$

Ponendo dunque $\mathrm{sen}\,\alpha\,d\omega = dv$, e cangiando nella equazione (10) u in $u - \dfrac{\rho\cos\alpha'}{\mathrm{sen}\,\alpha}$, si avrà

$$ds^2 = du^2 + \left(u^2 + \frac{m^2}{\mathrm{sen}^4\alpha}\right)dv^2,$$

la quale ci mostra che le elicoidi in questione sono applicabili sulla elicoide gobba a piano direttore, le cui eliche hanno per passo

$$(13)\qquad h = \frac{2\pi m}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

Il teorema è dunque dimostrato (*)

16. Si vede di qui che si hanno un numero infinito di elicoidi gobbe applicabili sopra una stessa superficie di area minima, come, per esempio, sopra una stessa elicoide gobba a piano direttore le cui eliche hanno per passo $2\pi a$; è chiaro, infatti, che esisteranno un numero infinito di valori di m e di α che soddisfino alla equazione

$$a = \frac{m}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

(*) Questo teorema era noto, ed io l'ho qui richiamato per servirmene nel N°. 17.

In questa equazione non comparisce ρ, e come d'altronde doveva avvenire l'elica direttrice può essere tracciata sopra un cilindro circolare tutt'affatto qualunque. La linea di stringimento di queste elicoidi dipende semplicemente dal raggio di questo cilindro. Si vede infatti che la curvatura geodetica delle eliche è $\frac{-u}{u^2+m^2}$, dunque l'elica corrispondente ad $u=0$, cioè quella distante dall'elica direttrice di una lunghezza $-\frac{\rho\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ (contata sulle generatrici), è una linea geodetica ed è per conseguenza anche la linea di stringimento.

17. Mi piace di fare osservare che le elicoidi gobbe che ora ho studiato possono considerarsi come le superficie luogo delle normali condotte a una elicoide qualunque lungo una stessa elica, o, in altri termini, che si ha il teorema: *Le superficie luogo delle normali a una elicoide qualunque lungo una stessa elica sono a cono direttore di rivoluzione, e sono perciò nuove elicoidi di cui le eliche hanno lo stesso passo e lo stesso asse di quelle della elicoide data.*

Infatti, l'equazione di una elicoide di cui $z=\varphi(u)$ è il profilo generatore, e $2\pi m$ il passo delle eliche, è (N°. 2)

$$z = m\,\text{arc tang}\frac{y}{x} + \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{14}$$

e lungo una stessa elica di raggio ρ si ha $x^2+y^2=\rho^2$.

Se dunque X, Y, Z sono i coseni degli angoli della normale cogli assi si avrà

$$X = \frac{-my+\varphi'(\rho)\rho x}{\rho\sqrt{m^2+\rho^2+\rho^2\varphi'(\rho)^2}}, \qquad Y = \frac{mx+\varphi'(\rho)\rho y}{\rho\sqrt{m^2+\rho^2+\rho^2\varphi'(\rho)^2}},$$

$$Z = \frac{-\rho}{\sqrt{m^2+\rho^2+\rho^2\varphi'(\rho)^2}}, \tag{14'}$$

e siccome ρ è costante lungo una stessa elica, se ne conclude che le normali all'elicoide, lungo una stessa elica, fanno angoli costanti colle generatrici del cilindro su cui l'elica è descritta; e da ciò risulta facilmente tutto il teorema.

18. Considerando dunque le elicoidi del N°. 15 come le superficie luogo delle normali lungo un elica all'elicoide (14), si ha per la (14')

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{m^2+\rho^2\varphi'(\rho)^2}{m^2+\rho^2+\rho^2\varphi'(\rho)^2};$$

e il passo delle eliche della elicoide gobba a piano direttore su cui queste ultime superficie sono applicabili, è per conseguenza (per la (13))

$$(15) \qquad h = 2\pi m \left\{ \frac{\rho^2}{m^2 + \rho^2 \varphi'(\rho)^2} + 1 \right\};$$

e poichè h non può mai esser zero, se ne conclude che: *In qualunque elicoide le eliche non possono essere mai linee di curvatura.* Questa conseguenza d'altronde si ottiene subito anche coll'osservare che siccome le normali alle elicoidi lungo le eliche fanno angoli costanti coll'asse, le loro indicatrici sferiche sono altrettanti circoli, e quindi per essere linee di curvatura dovrebbero essere piane.

19. Per ciò che precede le infinite elicoidi luogo delle normali lungo ciascuna elica di una stessa elicoide qualunque si applicano tutte su quella gobba a piano direttore; però questa elicoide non è la stessa per ciascuna di quelle superficie.

È facile d'altronde di vedere che vi sono soltanto *le elicoidi sviluppabili che godano della proprietà che le superficie elicoidali luogo delle loro normali lungo tutte le loro eliche si applichino tutte sulla stessa elicoide gobba a piano direttore, e quindi anche l'una sull'altra.*

Dalla formola (15) si vede infatti che per le elicoidi che godono della proprietà enunciata si deve avere

$$\rho^2 \varphi'(\rho)^2 + m^2 = c^2 \rho^2,$$

c^2 essendo una costante.

Ora per queste superficie la formola (2) del N°. 2 dà

$$ds^2 = \frac{c^2\rho^2 + \rho^2}{\rho^2 + m^2} d\rho^2 + k^2 (\rho^2 + m^2) dv^2,$$

che ponendo

$$\rho^2 + m^2 = \frac{1}{c^2 + 1} r^2, \qquad \frac{k}{\sqrt{c^2 + 1}} dv = dv_1,$$

si trasforma nell'altra

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dv_1^2,$$

che è la forma dell'elemento lineare che conviene soltanto alle superficie sviluppabili.

20. Riassumendo adunque possiamo dire che: *La classe delle superficie applicabili su quelle di area minima è costituita delle superficie sviluppate di quelle*

di curvatura costante negativa, e delle superficie gobbe il cui elemento lineare può porsi sotto la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)\,dv^2.$$

In questa classe di superficie applicabili si trovano le superficie di rivoluzione aventi per meridiane le curve (6), *e le elicoidi il cui profilo generatore ha per equazione la* (8). *Vi sono inoltre le superficie gobbe elicoidali generate da una retta che si muove appoggiandosi sopra una elica e facendo un angolo retto con questa elica, e un angolo qualunque, ma costante, colle generatrici del cilindro sul quale questa elica è descritta. Queste elicoidi possono essere considerate come le superficie luogo delle normali a una elicoide qualunque lungo una stessa elica.*

21. Io m'arresterò ora un momento sulle più semplici superficie a area minima, e darò una formola semplicissima per la lunghezza dei due raggi di curvatura della superficie di rivoluzione generata dalla catenaria, e per quelli della elicoide gobba a piano direttore, espressi gli uni per l'arco della curva meridiana, e gli altri per la lunghezza delle generatrici.

Per queste superficie, l'elemento lineare ha la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + a^2)\,dv^2,$$

ove ρ è l'arco di un meridiano per l'una, e la lunghezza della generatrice per l'altra.

Indicando dunque con R, R' i due raggi di curvatura principali di queste superficie si avrà

$$\text{(16)} \qquad RR' = -\frac{(\rho^2 + a^2)^2}{a^2},$$

e poichè

$$R + R' = 0,$$

se ne dedurrà

$$\text{(17)} \qquad R = -R' = \pm\frac{\rho^2 + a^2}{a}$$

che è la formola che testè citava.

22. Riferendoci soltanto alla elicoide gobba a piano direttore, queste formole (16) e (17), dimostrano che lungo l'asse di stringimento della superficie la curvatura è massima ed eguale a $-\frac{1}{a^2}$, mentre i raggi di curvatura sono minimi ed eguali a $\pm a$. È da osservarsi che a non è che il passo delle eliche diviso per 2π.

Ponendo $\rho = \mu a$, con μ variabile, le formole (16) e (17) ci danno

$$RR' = -(\mu^2 + 1)^2 a^2, \qquad R = \pm(\mu^2 + 1)a,$$

e se ne deduce che mentre le lunghezze delle generatrici crescono, a partire dalla linea di stringimento, crescono pure le lunghezze dei raggi di curvatura e la curvatura diminuisce, e se le lunghezze delle generatrici crescono come i numeri 1,2,3... i raggi di curvatura crescono come i numeri 1^2+1, 2^2+1, 3^2+1,... e la curvatura diminuisce come i quadrati di questi numeri.

Osserverò ancora che chiamando α l'angolo che le normali a questa elicoide fanno coll'asse si ha

$$\cos\alpha = -\frac{\rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}, \text{ ovvero } \operatorname{tang}\alpha = -\frac{m}{\rho},$$

formola semplicissima che fa conoscere facilmente α quando è data la lunghezza della generatrice corrispondente al punto che si considera. Per questa formola la equazione (12) dà $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, dunque le elicoidi gobbe luogo delle normali all'elicoide gobba a piano direttore lungo le eliche inviluppano i cilindri sui quali queste eliche sono descritte, ed hanno queste stesse eliche per linee di stringimento.

Superficie di rivoluzione sviluppate di quelle per le quali il rapporto dei due raggi di curvatura è costante.

23. Cerchiamo ora le superficie di rivoluzione sviluppate di quelle per le quali si ha

(1) $$\rho = k\rho', \quad (k \text{ essendo una costante})$$

relative al raggio di curvatura ρ. Pel teorema di Weingarten avremo subito per l'elemento lineare delle sviluppate delle superficie (1)

(2) $$ds^2 = d\rho^2 + \rho^{\frac{2k}{k-1}} dv^2.$$

Facendo ora un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto al N°. 10, si vedrà che l'equazione differenziale delle curve meridiane delle superficie cercate è

la seguente

$$dz = \sqrt{\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \alpha^{\frac{2-2k}{k}} r^{\frac{-2}{k}} - 1}\, dr\,,$$

ove α è una costante arbitraria;

Il secondo membro di questa equazione è una differenziale binomia, e si vede che essa può integrarsi per tutti i valori interi di k. Io considererò soltanto il caso di $k = -2$, nel quale si ha

$$dz = \sqrt{\frac{9}{4}\alpha^{-3}\, r - 1}\, dr\,,$$

da cui

$$z^2 = \frac{1}{\alpha^3} r^3 - \frac{4}{3} r^2 + \frac{16}{27}\alpha^3 r - \frac{64}{729}\alpha^6.$$

Dalla forma di questa equazione si riconosce che essa rappresenta un numero infinito (poichè α è arbitrario) di parabole cubiche che sono sviluppate di qualunque parabola ordinaria. Se ne conclude che: *La classe di superficie di rivoluzione generate da queste parabole cubiche, e che sono perciò tutte algebriche e del sesto ordine, sono applicabili l' una sull' altra.* Esse sono le superficie per le quali uno dei raggi di curvatura è doppio dell' altro, e diretto in senso contrario, e sono relative alle linee di curvatura di doppio raggio.

In queste superficie la curvatura geodetica dei paralleli varia inversamente all' arco del meridiano, e la curvatura della superficie varia inversamente al quadrato di questo arco.

Nel teorema precedente l' asse z è la direttrice della parabola.

Di alcune superficie applicabili sulla ellissoide schiacciata di rivoluzione, sulla iperboloide gobba di rivoluzione, e sulla paraboloide ellittica pure di rivoluzione.

24. *La ellissoide schiacciata di rivoluzione è applicabile sulla superficie pure di rivoluzione generata dalla rotazione di una curva* $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{\mathrm{M}}$, *che è della specie di quella dei seni, attorno alla linea dei suoi centri.*

La ellissoide di rivoluzione

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2}+\frac{z^2}{B^2}=1,$$

può rappresentarsi colle equazioni

$$x=Ar\cos\frac{\varphi}{A}, \qquad y=Ar\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{A},$$

$$z^2=B^2-B^2r^2.$$

Si ha dunque pel suo elemento lineare.

$$(2) \qquad ds^2=\left\{\frac{A^2+(B^2-A^2)r^2}{1-r^2}\right\}dr^2+r^2d\varphi^2.$$

Prendiamo ora la superficie pure di rivoluzione

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} x&=Lr\cos\frac{\varphi}{L},\\ y&=Lr\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{L},\\ z&=\varphi(r), \end{aligned}\right.$$

ove L è una costante arbitraria, e φ una funzione pure arbitraria. Si avrà pel suo elemento lineare

$$ds^2=\{L^2+\varphi'(r)^2\}dr^2+r^2d\varphi^2,$$

talchè la classe di superficie di rivoluzione applicabile sulla ellissoide (1) sarà quella definita dalle equazioni (3), nelle quali L è arbitrario, e φ è determinato dietro la condizione

$$(4) \qquad L^2+\varphi'(r)^2=\frac{A^2+(B^2-A^2)r^2}{1-r^2}.$$

Nel caso di L qualunque, l'integrazione dipende dalle funzioni ellittiche, ma quando l'ellissoide è schiacciata vi è un valore di L che semplifica moltissimo.

Osserviamo infatti che la equazione (4) può scriversi

$$L^2+\varphi'(r)^2=A^2-B^2+\frac{B^2}{1-r^2};$$

se dunque si pone $\qquad L^2=A^2-B^2,$

ciò che porta che l' ellissoide sia schiacciata (onde avere superficie reali), l' equazione precedente si ridurrà all' altra

$$\varphi'(r)^2 = \frac{B^2}{1-r^2}, \quad \text{che darà} \quad \varphi(r) = B \operatorname{arc\,sen} r,$$

ciò che mostra appunto che la superficie

$$\frac{x^2}{A^2-B^2} + \frac{y^2}{A^2-B^2} - \operatorname{sen}^2\frac{z}{B} = 0,$$

è applicabile sulla ellissoide schiacciata (1).

Si può notare che quando fra gli assi della ellissoide si verifica la relazione $A = B\sqrt{2}$, la curva meridiana della superficie di rivoluzione che abbiamo visto applicarsi sulla ellissoide schiacciata, è la vera curva dei seni.

25. Vediamo ora se è possibile di determinare almeno alcune fra le superficie elicoidali applicabili sulla ellissoide.

Prendendo al solito l' elemento lineare delle elicoidi

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{u^2\varphi'(u)^2}{u^2+m^2}\right\} du^2 + k^2(u^2+m^2)\,dv^2,$$

e ponendo

$$r^2 = u^2 + m^2,$$

si vedrà, per la equazione (2), che le equazioni $z = \varphi(u)$ dei profili generatori delle elicoidi applicabili sulla ellissoide (1), si otterrebbero integrando la equazione

$$\frac{A^2 + (B^2 - A^2)k^2u^2 + B^2k^2m^2 - A^2k^2m^2}{1 - k^2u^2 - k^2m^2}\,k^2u^2 = u^2 + m^2 + u^2\varphi'(u)^2$$

nella quale k ed m sono arbitrarie.

L' integrazione si effettua quando fra k ed m si stabilisca la relazione

$$k^2m^2 = 1,$$

che riduce la equazione precedente all' altra

$$\{(B^2 - A^2)k^2 + 1\}\,u^2 + B^2 + m^2 = -u^2\varphi'(u)^2,$$

la quale (quando si vogliano elicoidi reali) non può sussistere che per $A > B$, cioè

quando l'ellissoide e schiacciata. In questo caso si dovrà anche avere

$$(B^2 - A^2)k^2 + 1 = -h, \qquad \text{e quindi} \qquad m = \sqrt{\frac{1}{h+1}(A^2 - B^2)},$$

h essendo un numero arbitrario, ma positivo.

Per queste posizioni l' equazione precedente diverrà

$$\varphi'(u) \pm \frac{1}{u}\sqrt{hu^2 - \frac{1}{h+1}(A^2 + hB^2)},$$

e se ne trarrà facilmente

$$z = \varphi(u) = \pm\sqrt{hu^2 - \frac{1}{h+1}(A^2 + hB^2)}$$

$$\mp\sqrt{\frac{1}{h+1}(A^2 + hB^2)} \text{ arc cos } \frac{\sqrt{\frac{A^2 + hB^2}{h+1}}}{\rho}$$

per le equazioni dei profili di un numero infinito di elicoidi, aventi per passo delle loro eliche $2\pi\sqrt{\frac{1}{h+1}(A^2 - B^2)}$, e applicabili tutte sulla ellissoide schiacciata di rivoluzione.

Per h negativo ed A e B qualunque, queste elicoidi cessano di essere reali; però è da osservare che prendendo

$$h = -\frac{A^2}{B^2}, \qquad \text{si ottiene} \qquad z = \pm\frac{A}{B}u\sqrt{-1},$$

e questa ci mostra che esistono due elicoidi rigate immaginarie applicabili sull' ellissoide di rivoluzione nelle quali le generatrici rettilinee sono parallele agli asintoti dell' ellisse meridiana. Il passo delle eliche in queste elicoidi è $2\pi B\sqrt{-1}$.

Si generalizza così ciò che abbiamo detto al N°. 5. trattando della sfera. Si potrebbe pur vedere che vi è una elicoide gobba a piano direttore e immaginaria applicabile sulla ellissoide. Essa si ottiene prendendo.

$$k^2 = \frac{1}{A^2 - B^2}, \quad m = B\sqrt{-1}.$$

La linea di stringimento sarebbe l'asse delle z.

26. *La iperboloide di rivoluzione a una falda è applicabile sulla superficie pure di rivoluzione generata della rotazione della curva* $y = L\cos h\frac{z}{M}$, *attor-*

no all' asse delle z. Questa curva è della specie della catenaria, ma non può essere mai la vera catenaria. Questo teorema si dimostra in un modo analogo a quello con cui abbiamo dimostrato il teorema del N°. 24 sulla ellissoide. In questo caso se

$$(5) \qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2}-\frac{z^2}{B^2}=1\,,$$

è l' equazione della iperboloide, si ha

$$L=\sqrt{A^2+B^2}, \qquad M=B,$$

e perciò la curva $y = L \cos h.\frac{z}{M}$ non può essere mai la catenaria.

27. Con calcoli analoghi a quelli che abbiamo fatti tante volte si troverà che l' equazione

$$(6) \qquad \frac{A^2-(A^2+B^2)\,k^2u^2-(A^2+B^2)\,k^2m^2}{1-k^2u^2-k^2m^2}k^2u^2=u^2+m^2+u^2\varphi'(u)^2\,,$$

integrata, darebbe i profili $z=\varphi(u)$ generatori delle elicoidi applicabili sulla iperboloide gobba (5). L' integrazione si effettua subito ponendo

$$k^2m^2=1\,,$$

ciò che lascia ancora m arbitrario e soltanto compreso fra 0 e $\sqrt{A^2+B^2}$.

Dietro questa relazione, quando m è compreso fra 0 e B si ottiene

$$z=\varphi(u)=\pm\frac{1}{m}\sqrt{(A^2+B^2-m^2)\,u^2+m^2B^2-m^4}$$

$$\mp\sqrt{B^2-m^2}\ \text{arc sen}\,h\left(\frac{m}{u}\sqrt{\frac{B^2-m^2}{A^2+B^2-m^2}}\right),$$

e quando m è compreso fra B e $\sqrt{A^2+B^2}$

$$z=\varphi(u)=\pm\frac{1}{m}\sqrt{(A^2+B^2-m^2)\,u^2+m^2B^2-m^4}$$

$$\pm\sqrt{m^2-B^2}\ \text{arc sen}\left(\frac{m}{u}\sqrt{\frac{m^2-B^2}{A^2+B^2-m^2}}\right),$$

per le equazioni dei profili di un numero infinito di elicoidi applicabili sulla iperboloide gobba (5).

Per $m = B$ queste equazioni si riducono all' altra

$$z = \pm \frac{A}{B} u$$

la quale ci mostra che la elicoide gobba generata da una retta che si muove appoggiandosi sopra un' asse e facente con quest' asse un angolo costante la cui tangente trigometrica è $\pm \frac{B}{A}$ (restando cioè parallela agli assintoti della Iperbola meridiana), e descrivendo coi suoi punti delle eliche di passo $2\pi B$, è applicabile sulla iperboloide (5).

28. Ponendo nella equazione (6) fra k ed m le relazioni

$$1 - (A^2 + B^2) k^2 = 0, \qquad A^2 k^2 - (A^2 + B^2) k^4 m^2 - 1 + 2k^2 m^2 = 0,$$

cioè a dire ponendo

$$k^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}, \qquad m = B,$$

la equazione (6) diviene pure integrabile e dà

$$z = \varphi(u) = B \text{ arc cos } \frac{A}{u}, \tag{7}$$

per l' equazione di un profilo generatore di una elicoide applicabile sulla iperboloide (5). Questo profilo è la curva detta delle secanti.

Però la elicoide che ha per profilo la curva (7) è pure rigata ed è quella trovata dal Sig. Bonnet (*). Infatti le equazioni della elicoide che ha per profilo la curva (7) sono

$$x = u \cos \omega, \qquad y = u \text{ sen } \omega, \qquad z = B\left(\omega + \text{arc cos} \frac{A}{u}\right)$$

Prendendo ω dalla terza e ponendolo nelle due prime si trova per la equazione in (x, y, z) della elicoide

$$\frac{x - A \cos \frac{z}{B}}{y - A \text{ sen} \frac{z}{B}} = - \text{tang } \frac{z}{B},$$

(*) V. Memoire sur la théorie generale des surfaces 1848.

ovvero

$$x = -y \tang \frac{z}{B} + \frac{A}{\cos \frac{z}{B}}$$

e questa equazione mostra che la elicoide in questione è generata da una retta che si muove parallelamente al piano xy restando sempre tangente a un cilindro circolare di raggio A e descrivendo col suo punto di contatto una elica di passo $2\pi B$.

29. Però le due elicoidi gobbe che abbiamo visto applicarsi sulle iperboloide di rivoluzione ad una falda non sono che due superficie particolari di una classe di elicoidi, gobbe esse pure, che si applicano sulla stessa iperboloide. È facile infatti di dimostrare che: *Le elicoidi generate da una retta che si muove appoggiandosi su di una elica descritta sopra un cilindro di rivoluzione qualunque, o facendo un angolo costante differente da $\frac{\pi}{2}$ con quella elica, e un angolo qualunque, ma costante, colle generatrici del cilindro sul quale la elica è descritta si applicano sulla Iperboloide di rivoluzione a una falda.*

Osserviamo infatti che servendosi delle notazioni del N.º 15 potremo rappresentare le elicoidi in questione mediante le equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \omega + u \sen \alpha \cos (\omega + \alpha') \\ y = \rho \sen \omega + u \sen \alpha \sen (\omega + \alpha') \\ z = m\omega + u \cos \alpha ; \end{cases}$$

però in questo caso le linee u ed ω cioè le eliche e le generatrici non saranno ortogonali. Avremo dunque

$$ds^2 = du^2 + 2 (\rho \sen \alpha' + m \cot \alpha) \sen \alpha \, du \, d\omega$$

$$+ \left(u^2 + 2u\rho \frac{\cos \alpha'}{\sen \alpha} + \frac{\rho^2 + m^2}{\sen^2 \alpha}\right) \sen^2 \alpha d\omega^2.$$

ovvero, ponendo $\sen \alpha d\omega = dv$, e cangiando u in $u - \rho \frac{\cos \alpha'}{\sen \alpha}$,

$$ds^2 = du^2 + 2 (\rho \sen \alpha' + m \cot \alpha) \, du \, dv$$

$$+ \left(u^2 + \frac{\rho^2 \sen^2 \alpha' + m^2}{\sen^2 \alpha}\right) dv^2,$$

e in questo caso non si avrà mai

$$\rho \sen \alpha' + m \cot \alpha = 0.$$

Osserviamo ora che l' iperboloide

$$(9) \qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2}-\frac{z^2}{B^2}=1,$$

può considerarsi come quella di queste elicoidi per la quale si ha

$$m=0\,,\quad \alpha'=\frac{\pi}{2}\,,\quad \rho=A\,,\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{A}{B}\,,$$

si avrà dunque per questa superficie

$$ds^2=du^2+2A du\, dv+(u^2+A^2+B^2)\,dv^2.$$

e si vede di quì che, onde la elicoide (8) sia applicabile sulla iperboloide (9), si deve avere (poichè le eliche e le generatrici devono corrispondere ai paralleli e alle generatrici)

$$(10) \qquad \begin{cases} A=\rho \operatorname{sen}\alpha'+m\cot\alpha \\ A^2+B^2=\dfrac{\rho^2\operatorname{sen}^2\alpha'+m^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

ovvero

$$A=\rho\operatorname{sen}\alpha'+m\cot\alpha$$
$$B=\rho\operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha-m\operatorname{sen}\alpha\,,$$

e poichè ad ogni sistema di valori di A e B corrispondono infiniti sistemi di valori di ρ, m, α', α, mentre ad ogni sistema di valori di ρ, m, α, α' ne corrisponde uno solo per A e B, se ne conclude che data una iperboloide esiste sempre un numero infinito di elicoidi rigate applicabili su essa, mentre data una di queste elicoidi esisterà sempre una e una sola iperboloide applicabile su essa. Ciò ci conferma anche il teorema che ci dice che due iperboloidi non possono applicarsi l'una sull' altra.

30. Le elicoidi gobbe che abbiamo trovate ai N^i. 27 e 28 non sono che due superficie particolari di quelle che abbiamo considerato nel teorema precedente.

Facendo infatti nelle equazioni (10) $\alpha'=0$ si trova

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{B}{A}\,,\quad m=B,$$

cioè si ha la prima di quelle elicoidi.

Facendo $\alpha=\frac{\pi}{2}$, si trova $\rho\operatorname{sen}\alpha'=A$, $m=B$ e se si cerca la elica di stringimento di questa superficie si vedrà appunto che essa è descritta sopra un cilindro di raggio A.

31. Osserviamo adesso che se si classano le elicoidi rigate in due famiglie; quelle dell'una essendo tali che le loro generatrici siano trajettorie ortogonali delle eliche, e quelle dell'altra siano trajettorie sì ma non ortogonali delle eliche, si potrà dire (pei teoremi dei N[i] 15 e 29) che le elicoidi della prima famiglia si applicano sempre sopra una data classe di superficie di area minima, mentre le elicoidi della seconda famiglia si applicano sempre sopra una iperboloide di rivoluzione ad una falda (*).

32. Terminerò osservando che se $x^2+y^2=2pz$ è l' equazione di una paraboloide ellittica di rivoluzione, l' equazione

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^4}{p^2}u^4-m^2}-\frac{1}{2}mp \arccos\frac{mp}{k^2u^2}+C$$

ove k è arbitrario, e m è legato a k dalla relazione

$$k^4+\frac{k^2p^2}{m^2}-\frac{p^2}{m^2}=0,$$

ci dà i profili generatori di un numero infinito di elicoidi nelle quali il passo delle eliche è $2\pi m$, e che sono applicabili su quella paraboloide.

Parigi, Febbrajo 1865.

(*) Dopo la redazione di questa memoria ho visto che anche il Sig. Bour aveva segnalato queste proprietà delle elicoidi gobbe. V. Théorie de la deformations de Surfaces Journ. de l'Ecole Polyt. 1862.

PUBBLICAZIONI RECENTI

LAMPE - De superficiebus quarti ordinis quibus puncta triplicia insunt, *Berolini* 1864. (Dissert. inaug.)

TOWNSEND - Chapters on the modern geometry of the point, line and circle, vol. 2. *Dublin* 1865.

DE LA GOURNERIE - Sur une surface réglée du 8e ordre qui possède quatre lignes doubles du second ordre, *Paris* 1865. (Extr. des Compt. rend.).

PONCELET - Traité des propriétés projectives des figures, 2e édition, Vol. 1er, *Paris* 1865.

L. CREMONA - Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven (deutsch von M. CURTZE), *Greifswald* 1865.

F. GEISER - Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades, *Bern* 1865.

SYLVESTER - Syllabus of lecture delivered at king's College, London, june 28, 1865, on an elementary proof and generalization of sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots, *London* 1865.

BALTZER - Elementi di Matematica, Ia versione italiana fatta sulla 2a edizione di Lipsia ed autorizzata dall' autore, per L. CREMONA, Parte Ia, Aritmetica ordinaria, *Genova* 1865 (Tipografia editrice del R. I. de' Sordomuti).

Q. SELLA - Ueber die geometrischen Principien des Zeichnens, insbesondere üder die der Axonometrie (deutsch von M. CURTZE), *Greifswald* 1865.

D. CHELINI - Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei Momenti d' Inerzia (dalle Memorie dell'Accademia di Bologna tom. V. 1865).

P. TARDY - Nota sulla Quadratura (dalle Mem. delle Società Italiana tom. 2°. Modena 1865).

E. Betti - Teorica delle forze, che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla elettricità statica in 8° *Pisa* 1865 (Estratta dal Nuovo Cimento vol. XVIII, XIX, XX).

A. WINCKLER - Allgemeine formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale in 8° 1865 (Dalle Memorie dell' Accademia di Vienna).

SULL'INVERSIONE QUADRICA DELLE CURVE PIANE.

MEMORIA

DI

T. A. HIRST (*).

Introduzione.

1. Il metodo di inversione che forma l' argomento di questa memoria è un' immediata generalizzazione di quello che ora è universalmente adoperato. In luogo di un circolo fisso coll' origine nel suo centro, si prende come curva fondamentale una qualsivoglia conica (*quàdrica*) fissa, e si pone l' origine in un punto qualunque del suo piano. Per tal modo parecchie relazioni descrittive che nella teoria ordinaria sono mascherate, riguadagnano quella generalità e quel risalto che loro competono. Essendomi da molto tempo convinto della *utilità* di questo metodo generalizzato di inversione, credo desiderabile che se ne stabiliscano i primi principii generali, collo scopo di futuri rinvii. E siccome vorrei che il lettore si famigliarizzasse il più possibile cogli effetti della inversione, così faccio uso di considerazioni puramente geometriche e do sempre la preferenza alla diretta e immediata contemplazione delle varie forme geometriche che si offrono da sè stesse. Gli esempi introdotti di quando in quando non hanno altro fine che quello di illustrare la teoria; essi non mettono in chiaro tutta la potenza del metodo. Inoltre, affinchè questa memoria destinata ad essere inserita nei *Proceedings* della Società Reale non ricevesse troppa estensione, non si è tentato di assoggettare quei casi speciali ad una trattazione completa. Le figure sono, per la maggior parte semplici; data quella che è la fondamentale, le altre sono agevoli a delinearsi o a imaginarsi; nel trattare poi degli effetti dell' inversione sulle singolarità superiori delle curve, ho creduto conveniente di rinviare per mezzo delle iniziali ($\mathfrak{A}$. $\mathfrak{C}$), il lettore ad articoli e a figure della elaborata opera *Theorie der algebraischen Curven* di Plücker. La relazione che il metodo presente ha con quello, un po' più generale, della *trasformazione quàdrica*, sviluppato nel 1832 da Steiner nel suo libro *Geometrische Gestalten*, e da Magnus nell' 8° volume del giornale di

(*) Estratta dai *Proceedings* della Società Reale di Londra, 2 marzo 1865. Stimiamo cosa buona e utile il far conoscere ai lettori degli *Annali* questo importante ed elegantissimo lavoro del nostro amico, il Sig. Hirst.— Chiediamo poi licenza di derivare *quàdrico* da *quadro*, come *cubico* da *cubo* (Luigi Cremona).

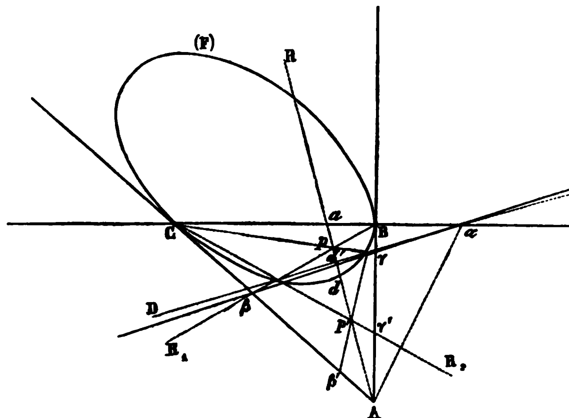
CRELLE, offre alcuni punti importanti sui quali mi propongo di ritornare in una futura occasione (*).

Definizioni.

2. Due punti, p e p', coniugati fra loro rispetto ad una data *conica fondamentale* (F), ed altresì collineari con un' *origine* fissa A nel piano di questa, si chiameranno *inversi* fra loro relativamente alla conica ed all' origine. In altre parole, l' inverso di un punto è l' intersezione della sua polare, rispetto ad (F), colla retta che va da esso all' origine. Se ne deduce a dirittura la seguente proprietà:

i. *Le diverse coppie di punti inversi* p, p' *su di una retta qualunque* R *passante per l' origine* A, *formano un' involuzione, i punti doppi della quale sono le intersezioni reali o imaginarie di quella retta colla conica fondamentale* (F).

Due curve si diranno *inverse* fra loro quando i punti dell' una sono gli inversi dei punti dell' altra. Qualche volta l' ultima è riferita alla *primitiva,* e la prima alla sua *inversa;* ma la relazione fra le due curve è scambievole, ed esse non si distinguono che per convenienza di espressione. Per raggiungere un chiaro concetto delle varie relazioni che esistono fra le curve inverse, trovo conveniente di collocare l'origine A fuori della conica fondamentale (F). Le modificazioni da introdursi quando l'origine è situata altrimenti sono affatto ovvie, e, tranne pochi casi, non vi si farà speciale allusione.



3. Adottando le denominazioni introdotte da MAGNUS, l' origine A e i due punti di contatto B e C delle tangenti tirate per A alla conica fondamentale (F) si chia-

(*) Non senza interesse ho trovato di recente che il metodo dell' inversione quàdrica fu esplicitamente suggerito, quantunque non sviluppato, dal prof. BELLAVITIS di Padova, non meno di ventisette anni fa.

meranno *punti principali*; il triangolo che ha in essi i suoi vertici *triangolo principale;* e i lati del medesimo, BC, AB, AC, cioè le polari A, B, C, *rette principali*. Talvolta converrà considerare B e C come distinti da A, che è sempre reale; quei due si diranno allora *i punti fondamentali*, e le rette principali AB, AC, che ivi toccano (F), si chiameranno analogamente le rette *fondamentali*, polari di B, C.

4. Ciò premesso, è chiaro dall' art. 2 che, in generale, un punto p ha un solo inverso p'. Non fanno eccezione che i tre punti principali, ciascuno de' quali è evidentemente inverso ad ogni punto della retta principale che è la sua polare. È inoltre evidente che ciascun punto della conica fondamentale (F) coincide col proprio inverso; e che i punti di (F) sono i soli dotati di questa proprietà.

Se ne inferisce, senza difficoltà, il seguente teorema:

i. *Se due curve hanno un contatto $(r)^{punto}$ in un punto p che non sia sopra una retta principale, anche le loro inverse avranno un contatto $(r)^{punto}$ nel punto inverso p'.*

Relazione fra gli ordini delle curve inverse.

5. L'ordine della curva inversa ad una data curva (P) d'ordine n può essere facilmente determinato. In primo luogo, siccome (P) ha n punti su ciascuna delle rette principali, la sua inversa passerà n volte per ciascuno de' punti principali (art. 4); e in secondo luogo, siccome una retta R condotta per l'origine A interseca (P) in n punti, nessuno de' quali è in generale situato nella retta principale BC, polare di A, così la medesima retta R intersecherà la curva inversa, non soltanto in n punti coincidenti coll'origine, ma anche in n altri punti distinti da A. Dunque

L' inversa quàdrica completa *di una curva qualunque dell' ordine n è una curva dell' ordine 2n, che ha un punto multiplo del grado n in ciascuno dei tre punti principali.*

6. Si è detto *completa* perchè in certe circostanze la curva inversa si decompone in una o più delle rette principali, ciascuna presa una o più volte, ed in una *effettiva* curva inversa (P') d'ordine minore, la quale passa un minor numero di

---

Considerando la data della sua pubblicazione, la memoria, nell' ultimo paragrafo della quale è suggerito quel metodo, è rimarchevole per più rispetti. Ha per titolo *Saggio di Geometria derivata*, e fa parte del 4° volume dei *Nuovi Saggi* dell' i. r. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Due anni prima, cioè nel 1836, lo stesso geometra aveva esposti completamente i principii dell' ordinario metodo dell' inversione *circolare;* la quale ultima, dopo un lasso di sette anni fu proposta (sembra) per la prima volta in Inghilterra dal sig. J. W. Stubbs in una memoria *On the application of a new method to the geometry of curves and curves surfaces*, inserita nel *Philosophical Magazine* vol. XXIII. pag. 338. (T. A. H.).

*

volte pei punti principali. Ciò accade, per l'art. 4., quando la curva primitiva (P) ha dei rami passanti per un punto principale; ed è evidente che l'ordine di (P') sarà $2n$ diminuito del numero totale di quei rami. Inoltre la moltiplicità di un punto principale per (P') sarà n diminuito del numero di volte che le due rette principali incrociate ivi entrano a far parte della inversa completa; in altre parole, n diminuito del numero di volte che la curva primitiva (P) passa pei poli di quelle rette principali.

Quindi se a, b, c indicano rispettivamente i gradi di moltiplicità dei punti principali A, B, C per la curva (P), e se a' b' c' hanno lo stesso significato rispetto alla curva inversa (P') d'ordine n', avremo

$$n' = 2n - a - b - c,$$
$$a' = n - b - c,$$
$$b' = n - a - b,$$
$$c' = n - a - c,$$

Queste equazioni si possono trasformare in quelle che ne risulterebbero col semplice scambio delle lettere accentate colle analoghe non accentate; il che mostra esistere fra le curve inverse effettive la stessa relazione mutua come tra i punti inversi. In virtù di questa mutua relazione i teoremi che si incontreranno in seguito sono tutti reciprocamente veri; l'enunciazione dei teoremi reciproci può adunque essere omessa in ogni caso.

7. Le equazioni superiori danno anche le seguenti relazioni

$$n' - (a' + b' + c') = (a + b + c) - n = n - n'$$

$$n' - a' = n - a;\ n' - b' = n - c,\ n' - c' = n - b,$$

donde apprendiamo che

i. *La differenza tra gli ordini di due curve inverse è numericamente eguale alla differenza tra l'ordine d'una di esse e il numero totale de' suoi passaggi pei tre punti principali.* Quest' ultima differenza ha diverso segno per le due curve.

ii. *Perchè una curva sia dello stesso ordine della sua inversa, e passi lo stesso numero di volte per ciascuno dei punti principali, è necessario e sufficiente* 1.° *che il suo ordine sia eguale al numero totale de' suoi passaggi pei tre punti principali;* 2.° *che passi lo stesso numero di volte pei due punti fondamentali.*

Per mezzo del secondo teorema sarebbe facile determinare il numero e la natura delle varie curve di un dato ordine che hanno curve inverse dello stesso ordine e dotate di analoghe proprietà rispetto ai punti principali. Però questa deter-

mi nazione e la soluzione della quistione affine « *sotto quali condizioni una curva d i dato ordine può coincidere colla propria inversa* » formeranno più propriamente l' argomento di una memoria separata. Qui basterà notare che una retta passante per l'origine, e la conica fondamentale riguardata come curva primitiva, sono i più semplici esempi di linee coincidenti colle proprie inverse. Ad un altro esempio si accenna nell' art. 11. es. 3?

Coniche inverse di linee rette.

8. Dagli art. 2 e 6, come anche direttamente da principii geometrici elementari (*), segue che

i. *L' inversa di una retta è, in generale, una conica passante pei tre punti principali, per le due intersezioni della conica fondamentale colla retta primitiva, e pel polo di questa rispetto a quella.*

Ma quando la retta primitiva passa per un punto principale, la conica inversa si decompone nella retta principale, polare di quel punto, e in un' altra retta (l' inversa effettiva) passante pel punto principale opposto a quella retta principale (art. 4). Così:

ii. *L' inversa effettiva di una retta passante per uno dei due punti fondamentali è una retta passante per l' altro, e queste rette inverse si segano sempre sulla conica fondamentale.*

Da questo e dal teorema i. art. 4 segue immediatamente:

iii. *Se l' una di due curve inverse ha un contatto* $(r)^{punto}$ (non sopra una retta principale) *con una retta passante per un punto fondamentale, l'altra avrà un contatto* $(r)^{punto}$ *colla retta inversa che passa per l'altro punto fondamentale; e i punti di contatto, essendo inversi fra loro, sono collineari coll' origine.*

In breve si esaminerà completamente la modificazione che questo teorema subisce quando uno dei punti di contatto cade in una retta principale.

9. La retta all' infinito ha pur essa la sua conica inversa (I), che è d' importanza in certe ricerche connesse coll' inversione. Osservando (art. 2) che l' inverso del punto all' infinito di una retta R, che passi per l' origine, è il punto di mezzo del segmento che (F) intercetta su R, e che (art. 4.) i punti all' infinito di (F) appartengono necessariamente anche ad (I), si vedrà che

i. *La conica* (I) *circoscritta al triangolo principale, che è inversa della retta*

(*) Un' elegante dimostrazione di questo teorema, identica con quella elementare a cui si fa allusione, è stata inserita dal sig. Chasles all' art. 209 del suo eccellente *Traité des sections coniques* (T.A.H.).

all' infinito, è simile e similmente posta alla conica fondamentale, della quale taglia pel mezzo tutte le corde convergenti all' origine.

Per mezzo di questa conica (I) si possono costruire facilmente gli assintoti di qualunque curva inversa. Siccome però l' articolo seguente è consacrato alla costruzione della tangente in un punto qualunque di una curva inversa, basterà per ora di notare i seguenti ovvii corollari del teorema superiore:

ii. *Gli assintoti dell' una fra due curve inverse sono rispettivamente paralleli alle rette che vanno dall' origine alle intersezioni dell' altra curva colla conica* (I) *che è circoscritta al triangolo principale ed è simile e similmente posta alla conica fondamentale* (F).

iii. *La conica inversa di una data retta è un' iperbola o un' ellisse secondochè questa retta taglia, tocca o non incontra la conica* (I) *che è circoscritta ecc.*

La conica (F) ed il circolo circoscritto al triangolo principale ABC hanno, oltre a BC, un' altra corda comune H (coniugata con BC), che è l' inversa di quel circolo (art. 8, i.), e questa corda è manifestamente la sola retta nel piano la cui inversa sia un circolo. Le intersezioni imaginarie di H con (I) sono inverse ai *punti circolari all' infinito*, epperò giacciono insieme con questi su due rette imaginarie incrociate nell' origine A.

È poi ben noto che tutte le corde di (I) che sottendono un angolo retto di vertice A passano per un punto fisso h (*). Le coniche inverse di tali corde sono, com' è facile a persuadersene, iperbole equilatere, passanti tutte, come le linee primitive per uno stesso punto h', l' inverso di h; questo punto h' si sa essere l' intersezione delle tre altezze del triangolo ABC, a cui sono circoscritte tutte le iperbole equilatere (**). Inoltre da un noto teorema segue che le corde di (I) sottendenti un angolo costante di vertice A inviluppano una conica che ha doppio contatto con (I) negli inversi dei punti circolari, ossia nelle intersezioni imaginarie di (I) ed H; e viceversa, che tutte le tangenti di quella conica intercettano sopra (I) un arco che sottende un angolo costante di vertice A (***). Le coniche inverse delle tangenti, quando queste tagliano effettivamente (I), sono iperbole i cui assintoti comprendono un angolo costante, ossia (per abbracciare tutti i casi) sono *coniche simili*. Ora per gli art. 4 e 6, l' inversa di una conica avente doppio contatto con (I) negli inversi dei punti

---

(*) SALMON, *Conic sections*, 4ª ed. art. 181, ex. 2. (T. A. H.)

(**) *Ibid.* art. 228, ex 1. Due distinti teoremi sulle coniche sono così ridotti a sovrapposizione, mediante l' inversione; e ci danno un semplice esempio della *dualità* che questo metodo, come quello delle polari reciproche, conferisce ad ogni teorema. (T. A. H.).

(***) CHASLES, *Sections coniques*, art. 473, 474; ed anche SALMON, *Conic. sections*, art. 276, 277, 296. (T. A. H.).

circolari è, in generale, *una curva del quart' ordine avente tre punti doppi in* A, B, C, *e tangente nei punti circolari alla retta all' infinito.* Questa curva è dunque anche *l' inviluppo delle coniche simili circoscritte al triangolo* ABC (†). È chiaro che il punto *h* appartiene alla serie delle coniche aventi doppio contatto con (I), e che H è la sua polare rispetto ad (I)... (††), così che noi possiamo riassumerci come segue:

iv. *Le rette le cui coniche inverse sono iperbole equilatere, passano tutte pel punto h inverso dell' intersezione delle tre altezze del triangolo principale; il circolo circoscritto a questo triangolo è l' inverso della polare* H *del punto h, rispetto alla conica* (I) *che è inversa della retta all' infinito; le intersezioni imaginarie di* H *ed* (I) *sono inverse dei punti circolari, e tutte le rette che inviluppano una conica* (Σ) *avente doppio contatto in questi punti inversi colla conica* (I) *sono inverse a coniche simili fra loro.*

Tangenti alle curve inverse nei punti inversi.

10. Ad un fascio di rette L, il cui centro sia p, corrisponde, per l' inversione quàdrica, un fascio di coniche (L') passanti pei tre punti principali (art. 8, i.) e pel punto inverso p'. Ad ogni elemento dell' un fascio corrisponde manifestamente un solo elemento dell' altro; di maniera che le rette L per p e le tangenti L', in p', alle rispettive coniche inverse (L') costituiscono due fasci omografici (†††); e siccome due raggi corrispondenti dei fasci coincidono con pp', così le rette di ogni altro pajo si intersecheranno sopra una retta fissa D (vedi la figura). Siccome poi, ai raggi pB, pC corrispondono rispettivamente i raggi p'C, p'B (art. 8, ii), così è evidente che la retta D non è altro che una delle tre diagonali del quadrilatero completo

(†) Di qui si deduce facilmente una nuova definizione dell' interessante curva del 4° ordine e 3ª classe (con tre regressi, una tangente doppia all' infinito e i contatti ne' punti circolari), che si è presentata a Steiner come inviluppo della retta che passa pei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto qualunque di un circolo sui lati di un triangolo inscritto, e della quale egli ha enunciate molte rimarchevoli proprietà in una memoria inserita nel vol. 53 del giornale di Crelle (*). In fatti quella curva è *l' inviluppo di un' iperbole equilatera circoscritta ad un triangolo equilatero ed avente i suoi assintoti inclinati fra loro come due lati di quel triangolo.* La stessa curva si può generare anche come un' ipocicloide ed è identica con quella la cui equazione si trova a pag. 214 dell' opera *Higher plane curves* di Salmon (T. A. H.).

(††) Chasles, *Sections coniques,* art. 474 (T. A. H.).

(†††) Chasles, *Principe de correspondance entre deux objets variables* (Comptes rendus, 24 decemb. 1855) e *Sections coniques* art. 325. Vedi anche Cremona, *Teoria geometrica delle curve piane,* p. 7. (T. A. H.).

(*) Vedi la mia memoria *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* nel vol. 64 del giornale di Crelle-Borchardt, p. 101. (L. C.).

$pBp'C$, le altre due diagonali del quale sono pp' e BC. Quindi se queste si intersecano in a, la retta D passerà, in virtù di una ben nota proprietà del quadrilatero, pei punti d', ed α coniugati di a rispetto a pp' e BC. Ma α si vede subito essere il polo di pp', ossia R, rispetto alla conica fondamentale; così che d, l'inverso di d', dev' essere il polo di D, ossia ad', come anche il coniugato armonico di A rispetto a pp' (art. 2, i.). Per conseguenza, dal fatto che quando L tocca in p una curva primitiva (P), la conica (L') epperò la sua tangente L' dee toccare in p' la curva inversa (P')... (art. 4, i.), noi possiamo dedurre il seguente teorema, per mezzo del quale si può facilmente costruire, per tutte le posizioni dell' origine, la tangente in un punto qualunque della curva inversa di una data:

i. *Le tangenti in due punti inversi di due curve inverse s' intersecano sulla polare, relativa alla conica fondamentale, del punto coniugato armonico dell' origine rispetto ai punti di contatto.*

Di qui s' inferisce inoltre:

ii. *Ad un punto multiplo di una curva* (il quale non sia sopra una retta principale) *corrisponde nella curva inversa un punto multiplo dello stesso grado di moltiplicità, e le tangenti ai rami corrispondenti* (inversi) *si intersecano sulla polare, relativa alla conica fondamentale, del punto coniugato armonico dell' origine rispetto ai due punti multipli.*

La realtà, il contatto e la generale distribuzione dei varii rami saranno comuni ai due punti multipli; i quali non differiranno che in certe proprietà secondarie. Per es. un ramo inflesso in uno di questi punti non corrisponderà in generale ad un ramo inflesso nell'altro; ma questo ramo avrà nel secondo punto multiplo un contatto tripunto colla conica inversa della retta che tocca il ramo inflesso nel primo punto multiplo.

11. Le tangenti a due curve inverse nei punti principali si possano investigare come segue.

Esclusi i punti principali B e C, la curva primitiva (P) intersechi la retta principale BC nei punti α, α_1, α_2,...; e imaginiamo una retta R che ruoti intorno all' origine A. Escluso A, questa retta R intersechi (P) in $n - a$ punti p, rispettivamente inversi degli $n' - a'$ in cui essa interseca la curva inversa (P')... (art. 7). È chiaro che ogni qualvolta, per la rotazione di R, p si avvicina ad uno dei punti α, allora p' si accosta a coincidere con A, così che R toccherà ivi un ramo di (P'); e più generalmente, se R ha un contatto $(r - 1)^{punto}$ in α con (P), essa avrà simultaneamente in A un contatto $(r)^{punto}$ con uno dei rami di (P').

Similmente, se (P) interseca la retta fondamentale AC nei punti β, β_1, β_2, ..., esclusi A e C, e se una retta R_1, girando intorno a B, interseca (P) in $n - b$ punti p, i loro $n' - c'$ punti inversi p' (art. 7) saranno le intersezioni di (P') colla retta R_2

inversa di R_1 e passante per C (art. 8, ii.). Due punti inversi p, p' sono poi sempre in linea retta con A (art. 2). Donde segue che ogni qualvolta, per la rotazione di R_1, due punti p e β si avvicinano, il punto inverso p' si avvicinerà a C ed ivi la retta R_2 toccherà un ramo di (P); e, come sopra, se R_1 ha un contatto $(r-1)^{punto}$ con (P) in un punto β, R_2 avrà in C un contatto $(r)^{punto}$ con un ramo di (P').

In modo analogo la retta R_3, che congiunge C con una delle intersezioni γ di AB e (P), ha per sua inversa una retta R_1, tangente in B ad un ramo di (P'). Tutti questi casi sono inclusi nei seguenti teoremi:

i. *Le tangenti in un punto principale all' una di due curve inverse sono rispettivamente inverse alle rette che uniscono le intersezioni dell' altra curva colla retta principale, polare di quel punto, al punto principale opposto.*

ii. *Se una retta non principale ha un contatto* $(r)^{punto}$ *in un punto principale con un ramo di una curva, la retta inversa avrà un contatto* $(r-1)^{punto}$ *colla curva inversa sulla retta principale polare di quel punto.*

Il secondo di questo teorema è leggermente modificato come si vedrà nell' articolo seguente, quando la retta del contatto $(r)^{punto}$ è principale; il primo teorema, quantunque sempre vero, diviene suscettibile di questo semplice enunciato:

iii. *Se l' una di due curve inverse ha un ramo toccato in un punto principale da una retta principale, l'altra curva ha un ramo toccato dalla polare di quel punto nel polo di questa retta.*

I seguenti esempi serviranno ad illustrazione di questi tre teoremi.

Es. 1? Se la linea primitiva è una retta segante le rette principali risp. in α,β,γ, (vedi la figura) Aα sarà la tangente in A alla conica inversa; e se Bβ, Cγ s'intersecano in p, il punto inverso p' è il polo di BC rispetto alla conica inversa. Questo polo è sempre reale; e può costruirsi facilmente, anche se B e C sono imaginari, osservando che p è l'intersezione della polare di α rispetto alla conica fondamentale, colla coniugata armonica di αA rispetto a BC ed alla retta primitiva.

Es. 2? Se la linea primitiva è una conica passante per l' origine e segante le rette fondamentali in β, γ, la sua inversa è una cubica passante per B e C ed avente un punto doppio in A (art. 6). Quest' ultimo punto è un nodo se la retta conica primitiva sega BC in punti reali α_1, α_2; Aα_1, Aα_2 saranno le tangenti ai due rami. Vi sarà invece un punto coniugato o isolato, se la conica primitiva non incontra BC. Le tangenti alla cubica in B e C si intersecano, come sopra, nel punto p', l' inverso del punto p comune alle Bβ, Cγ. Se la conica primitiva tocca queste ultime rette in β e γ, nel qual caso è manifesto che non può segare BC, allora la cubica avrà *punti reali* di flesso in B e C, e necessariamente un punto coniugato

in A (*). La retta Ap è la polare, rispetto alla conica primitiva come anche rispetto alla conica fondamentale, dell'intersezione α delle rette BC, $\beta\gamma$; quindi αA tocca la conica primitiva in A, ed (i) α è un punto della cubica: ed invero esso è il terzo flesso della medesima.

Es. 3.° Se la linea primitiva è una conica tangente alle rette fondamentali nei punti fondamentali, l'inversa è un'altra conica avente la stessa proprietà (art. 6.). La conica fondamentale non è la sola, in questa serie, che coincida colla propria inversa (art. 7); è facile a vedere che ve n'è una seconda che taglia ogni retta passante per l'origine in due punti inversi.

Singolarità delle curve inverse.

12. Se due delle intersezioni $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ della curva primitiva (P) colla retta principale BC coincidono; in altre parole, se (P) tocca BC in α, allora due rami di (P') si uniranno a formare una cuspide in A, colla tangente Aα. Così pure, se (P) tocca una retta fondamentale, sia AC in β, allora (P') avrà una cuspide in C e la tangente sarà la retta inversa di Bβ. In breve:

i. *Se l'una di due curve inverse tocca una retta principale in un punto non principale, l'inversa della retta che congiunge il punto di contatto col punto principale opposto toccherà, nel polo di quella retta, un ramo cuspidato dell'altra curva.*

Il teorema più generale è evidentemente questo:

ii. *Se l'una di due curve inverse ha un contatto* $(r)^{punto}$ *con una retta principale in un punto non principale, r rami dell'altra curva si uniscono in modo da formare un solo ramo con un punto multiplo d'ordine r nel polo di quella retta; e l'unica tangente di questo ramo è l'inversa della retta che congiunge il punto di contatto della prima curva col punto principale opposto.*

Si può aggiungere che, in generale, la singolarità al punto principale su questo ramo sarà invisibile o cuspiforme, secondochè r è dispari o pari. Così:

Es 1.° Se la conica primitiva considerata nell'art. 11. es. 2.° non soltanto passa per l'origine, ma tocca la retta principale BC in α, le cubica inversa, oltre al passare per B e C avrà una cuspide in A colla tangente Aα.

Es. 2.° Se la curva primitiva è una cubica con un nodo, allora, preso questo come origine, le relative tangenti come rette fondamentali, e la tangente stazionaria reale della cubica come terza retta principale, l'inversa sarà una curva di que-

(*) La verità di questo notissimo teorema sulle cubiche (*Higher plane curves* art. 183) è qui resa intuitiva (T. A. H.).

st'ordine tangente all' ultima retta nei punti fondamentali B e C (art. 6 e 11, iii.), ed avrà un punto triplo in A e per unica tangente ivi una retta passante pel flesso della cubica primitiva. Questa tangente incontra la curva di quart' ordine in quattro punti coincidenti con A (A. C. p. 190)... (*).

13. Se nel precedente teorema il contatto $(r)^{punto}$ ha luogo in un punto principale, possiamo imaginare che esso nasca dall' avvicinarsi indefinitamente ad A di un punto della retta principale ove abbia luogo un contatto $(r-1)^{punto}$; l' unica tangente al ramo della curva inversa ov' è un punto multiplo del grado $r-1$ si accosterà allora alla coincidenza con una retta principale (**). Quindi:

i. *Se un ramo dell' una di due curve inverse ha un contatto* $(r)^{punto}$ *con una retta principale in un punto principale, l' altra curva ha, nel polo di quella retta, un punto* $(r-1)^{plo}$ *con una sola tangente che è la polare di quel punto principale.*

Es. Se la curva primitiva è una cubica avente i punti fondamentali B, C per punti di flesso, e le rette fondamentali per tangenti stazionarie, e per conseguenza un altro flesso α nella retta BC, la curva inversa sarà del quart' ordine, toccherà $A\alpha$ nell'origine e passerà due volte per ciascuno dei punti fondamentali (art. 6 e 10). Dal presente teorema concludiamo inoltre che gli ultimi punti sono cuspidi per la curva di quart' ordine e che le rette fondamentali sono le relative tangenti (A. C. p. 192, ix).

Dai precedenti articoli si possono dedurre anche le seguenti proprietà.

i. *Se l' una di due curve inverse ha un punto multiplo sopra una retta principale,* ma non in un punto principale, *l' altra ha in generale un numero corrispondente di rami toccantisi fra loro nel polo di quella retta; ed in questo polo la comune tangente di quei rami è l' inversa della retta che va dal primo punto multiplo al punto principale opposto alla retta principale nominata.*

Per ottenere un chiaro concetto delle modificazioni che si possono presentare, basterà di considerare il caso in cui la curva primitiva (P) *ha un punto doppio in* α *sulla polare* BC *dell' origine* A.

(a) La curva inversa avrà in generale un *tacnodo* in A (A. C. p. 164, fig. 17, 18), in altre parole, due rami si toccheranno fra loro in A, e la comun tangente sarà $A\alpha$; questi rami avranno inoltre, un contatto tripunto in A colle coniche inverse delle due tangenti in α alla curva primitiva (†). Se una delle tangenti in α coincide con αA, uno de' rami della curva inversa sarà inflesso in A (A. C. fig. 21) (art. 11, ii.).

(*) Vedi anche *Higher plane curves*, art. 217. (T. A. H.).

(**) Il caso corrispondente ad $r=2$ è già stato considerato all' art. 11, iii. (T. A. H.).

(†) Per l'art. 11, i. le coniche inverse a qualunque retta per α hanno un contatto bipunto in A con ciascun ramo del tacnodo (T. A. H.).

Se uno de rami in α tocca la retta principale BC, uno de' rami in A sarà ivi cuspidato, ed Aα sarà ancora la tangente comune al ramo cuspidato ed al ramo ordinario (A. C. fig. 28). Se queste due singolarità si trovano riunite nella curva primitiva, la curva inversa presenta in A un punto triplo, con una sola tangente, formato da un ramo inflesso e da un ramo cuspidato (A. C. fig. 30).

(b) Se le tangenti in α coincidono, così che i rami della curva primitiva formino ivi una cuspide ordinaria o *ceratoide* (regresso di prima specie, A. C. fig. 16), le coniche aventi contatto tripunto in A coi corrispondenti rami della curva inversa coincideranno del pari, e quest'ultima avrà una cuspide *ramfoide* (†) (regresso di seconda specie, A. C. fig. 19), ove Aα sarà ancora la sola tangente ed incontrerà la curva in *quattro* punti coincidenti nella cuspide. Nel caso speciale in cui la tangente alla cuspide α passi per l'origine, la cuspide in A sulla curva inversa assumerà la forma ceratoide, ma sarà di un grado più elevato di quella della curva primitiva, perchè la tangente in A incontrerà ivi la curva, non in *tre* ma in *cinque* punti coincidenti (A. C. p. 167, iv.). Se la retta principale BC è la tangente alla cuspide ordinaria α, la curva inversa avrà un punto triplo in A, coll'unica tangente Aα, incontrante la curva in *cinque* punti coincidenti. All'occhio, questa singolarità presenta la forma di un punto di flesso (A. C. p. 174, fig. 29).

I seguenti esempi illustreranno il prodursi delle cuspidi d'entrambe le specie, per mezzo dell'inversione.

Es. 1.° La curva primitiva sia una cubica cuspidata, l'origine sia posta nel flesso reale, la tangente stazionaria sia scelta come una delle rette fondamentali, ed una retta qualunque passante per la cuspide α si assuma come polare dell'origine. Se i punti B, C ne' quali l'ultima retta interseca la cubica e la tangente stazionaria si considerano come punti fondamentali, l'inversa sarà (art. 6) una curva di quart'ordine passante una volta per B e due volte per ciascuno dei punti C ed A. La tangente a questa curva in B è l'inversa della retta che va da C alla terza intersezione γ della cubica colla retta fondamentale AB (art. 11, i.). Il punto C è una cuspide ceratoide per la curva di quart'ordine, e CB è la tangente (art. 13, i). Da ultimo, Aα è la tangente in A che è una cuspide ramfoide (*b*). Perciò la curva inversa coincide con quella rimarchevole linea del quart'ordine che le recenti ricerche del prof. SYLVESTER, sulle radici dalle equazioni di quinto grado, hanno resa sì interessante (Phil. Trans. 1865). Essa è da lui denominata *bicorne*, e nella classificazione di PLÜCKER è numerata xvi (A. C. p. 193). Siccome la cubica primitiva,

---

(†) La denominazione *cuspinodo* del prof. CAYLEY è meglio appropriata (Quart. Journ. vol. 6, p. 74); la singolarità di cui si tratta può anche riguardarsi come un punto stazionario sopra una tangente stazionaria, perchè la curva giace tutta da una stessa banda di questa (T. A. H.).

dalla quale essa è stata derivata, può risguardarsi come l'inversa di una conica (art. 12, es. 1°), così è evidente che parecchie proprietà della bicorne si possono dedurre da quelle di una conica mediante una doppia inversione con due serie di punti principali.

Es. 2° Se la curva primitiva è una conica, l'inversa è in generale una curva del quart'ordine passante due volte per ciascun punto principale (art. 6).

Tutte le dieci varietà di tali curve del quart'ordine, che sono state descritte da Plücker, (A. C. p. 195), corrispondono d'una maniera semplicissima alle differenti posizioni che può avere la conica primitiva (*). Ora, è notissimo (**) che, in generale, si possono inscrivere in questa conica due triangoli, ciascun de' quali sia inoltre circoscritto al triangolo principale; d'onde inferiamo che nella curva di quart'ordine si possono inscrivere due triangoli per modo che ciascun lato di ciascun triangolo passi per un punto doppio. Perciò una seconda inversione, relativa ad uno di questi triangoli, trasformerà la curva del quart'ordine in una del quinto (art. 6) con tre tacnodi, le varietà della quale corrisponderanno a quelle della curva del quart'ordine. Se per es., la conica primitiva fosse inscritta nell'originario triangolo principale, allora la curva di quart'ordine avrebbe tre *cuspidi ceratoidi,* e la curva del quint'ordine sarebbe quella rimarchevole linea che Plücker ha segnalata (A. C. p. 222, fig. 35) come dotata di tre *cuspidi ramfoidi.*

(c) Rispetto alle singolarità di grado superiore sulla curva primitiva e sopra una retta principale, poco più è mestieri aggiungere. Ad un tacnodo in α corrispondono nella curva inversa due rami tangenti alla retta Aα ed aventi un contatto tripunto fra loro in A (A. C. p. 165, fig. 20). In sostanza, come regola generale, il contatto dei rami in A è d'ordine più elevato di quello de' corrispondenti rami in α. Se α fosse una cuspide ramfoide sulla curva primitiva, A sarebbe pure una cuspide ramfoide per la curva inversa, ma di grado più alto (A. C. p. 170), e così via. Merita da ultimo d'essere notato che, quantunque (a) l'inverso di un tacnodo in A sia un nodo ordinario in α sulla polare di A, questo nodo diviene pur esso un tacnodo quando si accosta sino a coincidere con B o C (art. 11, iii), e similmente:

(*) Per es. se il triangolo principale è coniugato rispetto alla conica primitiva, la curva inversa di 4° ordine ha in ciascun punto principale ambedue i suoi rami inflessi (art. 11, ii)... (*). In questo caso è poi evidente che due punti principali devono giacere al di fuori della conica primitiva; onde un punto principale sarà necessariamente un punto coniugato per la curva di 4° ordine (art. 11, es. 2°). Così l'inversione rende intuitive parecchie curiose proprietà, segnalate da Plücker, che hanno luogo nella curva di 4° ordine quando i loro punti doppi sono anche punti d'inflessione (A. C. p. 199)... (T. A. H.).

(**) Salmon, *Conic sections*, p. 237; Chasles, *Sections coniques*, art. 246 (T. A. H.)

(*) Vedi la mia memoria sulla superficie di 4° ordine di Steiner (giorn. di Crelle-Borchardt, vol. 63), art. 24-27 (L. C.)

i. *Se l'una di due curve inverse ha una cuspide ramfoide in un punto principale nel quale la tangente sia una retta principale, l'altra ha una cuspide ramfoide nel polo di questa retta e la relativa tangente è la polare di quel punto.*

Ciò infatti risulta da (b) considerando, col prof. CAYLEY (†), una cuspide ramfoide in B colla tangente BC, come nascente dalla coincidenza di una cuspide ceratoide in α con un nodo in B.

Casi speciali dell' inversione quàdrica.

15. I casi speciali dell' inversione, che corrispondono a ipotesi particolari intorno alla posizione dell' origine ed alla natura della conica fondamentale, sono assai numerosi. La scelta di questi elementi dee naturalmente dipendere dalla natura delle proprietà che si vogliono investigare col metodo di inversione. Qui non si farà menzione che di pochi fra i casi speciali più utili.

(1) *Quando la conica fondamentale* (F) *è un' iperbole col centro nell'origine* A, i suoi assintoti costituiscono le rette fondamentali, e le loro intersezioni colla retta all' infinito sono i punti fondamentali (art. 3). Ogni retta parallela ad un assintoto ha per inversa una retta parallela all' altro: e le due rette si segano sull' iperbole fondamentale (art. 8 ii). L' inversa d' ogni altra retta nel piano è un' iperbole passante per l' origine ed aventi i suoi assintoti paralleli a quelli dell' iperbole fondamentale (art. 8, i); inoltre la conica (I) inversa della retta all' infinito si risolve in questi medesimi assintoti (art. 9, i). Ogni iperbola che non passi per l' origine, ma abbia gli assintoti paralleli a quelli della fondamentale, ha per inversa un iperbole dotata delle stesse proprietà (art. 6); e se la primitiva ha il centro all' origine, questo punto sarà anche il centro dell' inversa (art. 11, es. 3°). Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p, p' s' intersecano ora sopra una retta D che divide pel mezzo pp' ed è parallela al diametro della conica fondamentale coniugato a pp' (art. 10).

(1a) *Quando la conica fondamentale è un' iperbole equilatera, l'origine essendo sempre nel centro di essa*, il metodo d' inversione diviene identico colla *trasformazione iperbolica* studiata dal prof. SCHIAPARELLI di Milano, nella sua interessante memoria *Sulla trasformazione geometrica delle figure* (*). Allora la retta D, sulla quale si intersecano le tangenti a due curve inverse in punti inversi p, p', non solamente divide per metà pp', ma è inclinata dello stesso angolo, come pp', a ciascuno degli assintoti dell' iperbole fondamentale.

(†) Quarterly Journal of Mathematics, vol. 6, p. 74. (T. A. H.)

(*) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tom. 21 (T. A. H.).

(2) *Se la conica fondamentale è un' ellisse col centro nell' origine,* l' inversa d' ogni retta nel piano è un' ellisse passante per l' origine ed inoltre simile e similmente posta all' ellisse fondamentale. L' ellisse (I) inversa della retta all' infinito si risolve ora in un *punto* che coincide coll' origine. Ogni ellisse non passante per l' origine, ma simile e similmente posta alla fondamentale, ha per sua inversa una ellisse dotata delle stesse proprietà; e se la primitiva fosse altresì concentrica colla fondamentale, tale sarebbe pure l' inversa. Le tangenti a due curve inverse in due punti inversi p, p' s' intersecano ancora sopra una retta D che dimezza pp', ed è parallela al diametro della ellisse fondamentale coniugato a pp'

(2*a*) *Quando la conica fondamentale è un circolo col centro nell' origine,* abbiamo, come già si è detto, il caso dell' *inversione circolare,* e i punti circolari (imaginari) all' infinito sono i punti fondamentali; la retta D diviene, com' è noto, perpendicolare a pp' nel suo punto di mezzo. Dai teoremi ii. ed iii. dell' art. 8 possiamo ora inferire che:

(i) *L' inversa circolare di una retta passante per uno dei punti circolari è una retta passante per l' altro, e le due rette si segano sul circolo fondamentale.*

(ii) *L' inversa circolare di un fuoco* semplice *di una curva è sempre un fuoco della curva inversa; ma se il primo fuoco è nell' origine, allora la curva inversa ha due cuspidi nei punti circolari all' infinito* (art. 12, i).

Importa di notare che questo teorema non si applica ad un fuoco *doppio* f della curva primitiva, cioè all' intersezione delle tangenti di questa curva nei punti circolari. Perchè in questo caso le rette che congiungono il punto inverso f' coi punti circolari *intersecano* semplicemente la curva inversa sulle rette fondamentali (art. 11, i); di più la retta che unisce i punti d' intersezione (corda comune del *punto-circolo* f' e della curva inversa) biseca Af' ortogonalmente. Così avviene che l' inverso circolare del centro f di un circolo primitivo non è il centro del circolo inverso, ma è l' inverso dell' origine rispetto all' ultimo circolo. Se la curva primitiva ha punti di flesso nei punti circolari, l' inverso f' dell' intersezione f (un fuoco triplo) delle tangenti stazionarie non solamente sarà un fuoco della curva, ma la corrispondente direttrice dimezzerà Af' ad angolo retto. Però le relazioni focali delle curve inverse circolari meritano un esame più scrupoloso; ed io mi propongo di ritornarvi in altra occasione.

(3) *Quando la conica fondamentale consiste in un pajo di rette reali* F_1, F_2 *intersecantisi in* F, i punti fondamentali B, C coincidono con F, e la retta principale BC diviene la coniugata armonica di AF rispetto alle F_1, F_2. La conica (I) inversa della retta all' infinito è ora un' iperbola per la quale AF è un diametro, e gli assintoti sono paralleli ad F_1, F_2. Due rette coniugate armoniche rispetto ad F_1, F_2 costituiscono un pajo di rette inverse, e l' inversa di ogni altra retta, che tagli

BC in α, è una conica toccata in A ed in F da Aα e BC, di maniera che le coniche inverse di tutte le rette parallele ad AC sono concentriche, ed hanno AF per diametro comune. Le coniche inverse di tutte le rette passanti per un punto fisso a di AF hanno evidentemente un contatto tripunto fra loro in F, così che le coniche inverse delle rette parallele ad AF avranno in F un contatto tripunto coll' iperbola (I). Tutte le coniche toccanti BC in F, ma non passanti per A, sono inverse di coniche dotate delle stesse proprietà, e tutte le coniche passanti per A e per F, ma non toccanti BC in quest' ultimo punto, hanno per inverse delle coniche di analoga descrizione. Le tangenti ai punti inversi p, p' di due curve inverse ora si intersecano sulla coniugata armonica di BC rispetto alle Fp, Fp'.

(3a) *La conica fondamentale può consistere in un pajo di rette perpendicolari fra loro.* Allora i risultati sono simili e alquanto più semplici di quelli sopra esposti.

(4) *Quando la conica fondamentale consiste in un pajo di rette imaginarie intersecantisi in un punto reale* F, gli effetti della inversione sono analoghi a quelli considerati in (3). Per avere costruzioni reali, basta considerare il *punto-ellisse* F come concentrico, simile e similmente posto ad una data ellisse (E). Le rette FA e BC divengono allora diametri coniugati di (E), e due punti inversi qualunque giaceranno del pari su diametri coniugati. Quando le rette imaginarie F_1, F_2 passano pei punti circolari, otteniamo la seguente specie di inversione.

(4a) *La conica fondamentale consiste in un punto-circolare* F. La retta principale BC è ora perpendicolare ad AF in F, e la congiungente di ogni coppia di punti inversi p, p' sottende un angolo retto di vertice F. Due rette inverse, per F, sono perpendicolari fra loro, e l' inversa di una retta qualunque nel piano è una conica passante per A e normale ad AF in F. Il circolo (I) descritto sopra AF come diametro è l' inversa della retta all' infinito, e tutte le rette che toccano uno stesso circolo concentrico con (I) sono inversi di coniche simili fra loro; e queste coniche sono ellissi, parabole o iperbole secondochè il circolo in discorso è più grande, eguale o minore di (I)... (art. 9, iii). Da ultimo ogni circolo per F, il cui centro sia sopra AF, è inverso di un circolo dotato della stessa proprietà; e ciò vale anche per ogni circolo passante pei punti A ed F.

(5) *Quando l'origine* A *è sulla conica fondamentale* (F) i punti fondamentali B e C coincidono con A, e le tre rette principali coincidono colla tangente in A. La conica (I) inversa della retta all' infinito tocca (F) in A e dimezza tutte le corde di (F) passanti per A, e la conica inversa di ogni altra retta nel piano ha evidentemente un contatto tripunto in A con (F). Tutte le rette che convergono in uno stesso punto della tangente in A sono inverse di coniche che hanno un contatto quadripunto fra loro; onde le rette parallele alla tangente in A sono inverse di co-

niche aventi in A un contatto quadripunto con (I). Finalmente, le tangenti a due curve inverse, in punti inversi p, p', si segano sopra una retta D che tocca (F) nell' intersezione di questa conica con pp'.

Un caso un po' più speciale, nelle particolarità del quale non possiamo entrare, ha luogo *quando la curva fondamentale è una parabola, e l' origine all' infinito sull' asse di essa*. L' inversione relativa ad *una conica ed al suo fuoco* è pure un caso speciale che merita attenzione, ma che qui non può essere considerato.

Trasformazione correlativa all' inversione quàdrica.

16. In corrispondenza al metodo dell' inversione quàdrica, vi è naturalmente un metodo correlativo, che in certe indagini è egualmente utile. Esso però non richiede un' esposizione separata. Si può anche osservare che la polare reciproca, rispetto alla conica fondamentale, della curva inversa di una qualsivoglia curva primitiva, e l' inversa della sua polare reciproca conducono a dirittura a curve derivate, delle quali le curve pedali, negative e positive, non sono che casi speciali.



SUR LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES HOMOGÈNES

PAR

E. CATALAN

PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

I. Je suppose que, dans les équations de la forme ordinaire:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{S}=\ldots \qquad (1),$$

les quantités P, Q, R, S,... soient des fonctions, *homogènes et du premier degré*, des variables x, y, z, u,...; et pour fixer les idées, je considère seulement le cas où le nombre de ces variables se réduirait à quatre; de manière que

$$\left.\begin{aligned} P &= Ax + By + Cz + Du\,, \\ Q &= A'x + B'y + C'z + D'u\,, \\ R &= A''x + B''y + C''z + D''u\,, \\ S &= A'''x + B'''y + C'''z + D'''u. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si l'on désigne par λ, λ', λ'', λ''' des constantes quelconques, et que l'on pose pour abréger:

$$K=\Sigma\lambda A\,,\quad L=\Sigma\lambda B\,,\quad M=\Sigma\lambda C\,,\quad N=\Sigma\lambda D\,, \qquad (3)$$

on pourra remplacer chacun des rapports (1) par

$$\frac{\lambda dx+\lambda' dy+\lambda'' dz+\lambda''' du}{Kx+Ly+Mz+Nu} \qquad (4)$$

Maintenant, disposons des facteurs λ, λ', λ'', λ''' de façon que

$$\frac{\lambda}{K}=\frac{\lambda'}{L}=\frac{\lambda''}{M}=\frac{\lambda'''}{N}=\frac{1}{s} \qquad (5)$$

s étant une inconnue auxiliaire; c'est-à-dire prenons les équations

$$\left.\begin{aligned}
(A - s)\lambda + A'\lambda' + A''\lambda'' + A'''\lambda''' &= 0\,,\\
B\lambda + (B' - s)\lambda' + B''\lambda'' + B'''\lambda''' &= 0\,,\\
C\lambda + C'\lambda' + (C'' - s)\lambda'' + C'''\lambda''' &= 0\,,\\
D\lambda + D'\lambda' + D''\lambda'' + (D''' - s)\lambda''' &= 0\,:
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

l' inconnue s sera déterminée par l'équation

$$\begin{vmatrix}
A-s, & A', & A'', & A''', \\
B, & B'-s, & B'', & B''', \\
C, & C', & C''-s, & C''', \\
D, & D', & D'', & D'''-s,
\end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

II. A cause des relations (5) la fraction (4) se réduit à

$$\frac{1}{s}\,\frac{d(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z + \lambda''' u)}{\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z + \lambda''' u}$$

Par conséquent, si l'on représente par s_1, s_2, s_3, s_4 les racines de l'équation (7) (supposées *inégales* pour plus de simplicité); par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda'_1, \ldots$ *des valeurs correspondantes* de $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$, vérifiant les équations (6), on aura pour intégrales des équations differentielles proposées:

$$\left(\frac{\lambda_1 x + \lambda'_1 y + \lambda''_1 z + \lambda'''_1 u}{k_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} = \left(\frac{\lambda_2 x + \lambda'_2 y + \lambda''_2 z + \lambda'''_2 u}{k_2}\right)^{\frac{1}{s_2}}$$

$$\left(\frac{\lambda_3 x + \lambda'_3 y + \lambda''_3 z + \lambda'''_3 u}{k_3}\right)^{\frac{1}{s_3}} = \left(\frac{\lambda_4 x + \lambda'_4 y + \lambda''_4 z + \lambda'''_4 u}{k_4}\right)^{\frac{1}{s_4}} \quad (*)\ (8)$$

III. - *Application* - Je suppose que les équations (1) se réduisent à

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x} \qquad (9),$$

auquel cas les équations (6) deviennent

$$\lambda - s\lambda' = 0\,,\quad \lambda' - s\lambda'' = 0\,,\quad \lambda'' - s\lambda''' = 0\,,\quad \lambda''' - s\lambda = 0 \qquad (10)$$

(*) Pour plus de symétrie, j'ai pris quatre constantes arbitraires; mais, ainsi que cela doit être, elles se réduisent à trois; car l'on peut faire

$$k_2 = \alpha^{s_2} k_1^{\frac{s_2}{s_1}}\,,\quad k_3 = \beta^{s_3} k_1^{\frac{s_3}{s_1}}\,,\quad k_4 = \gamma^{s_4} k_1^{\frac{s_4}{s_1}}$$

Il résulte, de celles-ci,

$$s^4 - 1 = 0 \qquad (11);$$

ou

$$s_1 = +1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = +\sqrt{-1}, \quad s_4 = -\sqrt{-1}.$$

D'ailleurs, on satisfait aux équations (10) en prenant

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda'_1 = 1, \quad \lambda''_1 = 1, \quad \lambda'''_1 = 1,$$
$$\lambda_2 = -1, \quad \lambda'_2 = +1, \lambda''_2 = -1, \quad \lambda'''_2 = +1,$$
$$\lambda_3 = +\sqrt{-1}, \lambda'_3 = -1, \lambda''_3 = -\sqrt{-1}, \lambda'''_3 = +1,$$
$$\lambda_4 = -\sqrt{-1}, \lambda'_4 = -1, \lambda''_4 = +\sqrt{-1}, \lambda'''_4 = +1.$$

Par conséquent, les intégrales cherchées sont

$$\frac{x+y+z+u}{k_1} = \frac{k_2}{-x+y-z+u} = \left[\frac{u-y+(x-z)\sqrt{-1}}{k_3}\right]^{-\sqrt{-1}}$$
$$= \left[\frac{u-y-(x-z)\sqrt{-1}}{k_4}\right]^{+\sqrt{-1}};$$

ou plutot:

$$(y+u)^2 - (x+z)^2 = A \qquad (12),$$

$$l(x+y+z+u) = \beta - \sqrt{-1}\, l[u-y+(x-z)\sqrt{-1}]$$
$$= \gamma + \sqrt{-1}\, l[u-y-(x-z)\sqrt{-1}] \qquad (13);$$

A, β, γ étant les trois constantes arbitraires.

Pour simplifier la dernière équation, je suppose:

$$R^2 = (u-y)^2 + (x-z)^2, \quad u-y = R\cos\varphi, \quad x-z = R\sin\varphi \quad (14);$$

d'où résulte, par des formules connues:

$$l[u-y+(x-z)\sqrt{-1}] = lR + \sqrt{-1}\,\varphi,$$
$$l[u-y-(x-z)\sqrt{-1}] = lR - \sqrt{-1}\,\varphi.$$

Les équations (13) deviennent alors:

$$l(x+y+z+u) = \beta - \sqrt{-1}\, lR + \varphi = \gamma + \sqrt{-1}\, lR + \varphi;$$

ou, ce qui est équivalent:

$$l(x+y+z+u) = \frac{\beta+\gamma}{2} + \varphi,$$

$$lx = \frac{\beta-\gamma}{2\sqrt{-1}}.$$

Les intégrales cherchées sont donc, finalement:

$$(y+u)^2-(x-z)^2=A \qquad (12)$$

$$l(x+y++z+u)=B+\varphi, \qquad (15)$$

$$(u-y)^2+(x-z)^2=R^2: \qquad (16)$$

les costantes arbitraires sont A,B,R. Quant à l'angle φ; il est déterminé par les relations (14).

IV. *Remarque*. La méthode précédente permettra, quelquefois, d'intégrer *indirectement* certaines équations qu'il semblerait impossible d'attaquer de front. Par exemple, si l'on reprend les équations

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{x} \qquad (9),$$

et qu'on élimine z et u, l'on trouve

$$\frac{x}{y}=y^2\frac{d^3y}{dx^3}+4y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \qquad (7).$$

D'une autre côté, si l'on pouvait éliminer u, z et φ entre les équations (12), (14), (15), (16), on arriverait à une certaine équation

$$F(x, y, A, B, R)=0 \qquad (18)$$

Satisfaisant à l'équation (17) et contenant trois constantes arbitraires: la première serait donc l' intégrale générale de la seconde. Mais, si cette élimination est impraticable, rien n'empêche de regarder z, u et φ comme des variables auxiliaires et du *prendre pour intégrale de l'équation* (17), *le système des équations* (12), (14), (15) et (16).

V. Je laisse de côte l'examen des cas dans lesquels l'équation *caractéristique* (7) aurait une racine nulle, ou des racines égales; mais ils ne sauraient offrir de difficultés véritables. Par exemple si l'on prend les équations

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}, \qquad (19)$$

on trouve $s_1=0$, Mais il est évident que les équations équivalent à

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y}=\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}.$$

Par conséquent, les intégrales du système (19) sont

$$(x - y)^2 (x + y + z) = A,$$
$$(y - z)^2 (x + y + z) = B.$$

Liége, 9 octobre 1865.

NOTA ALLA MEMORIA DEL SIG. E. CATALAN.

All' elegante Memoria del Sig. Catalan, credo utile di aggiungere alcune Notizie Bibliografiche.

Rappresentando per dt il secondo membro dell'equazioni (1) differenziali proposte del Sig. Catalan, avremo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{S} = dt$$

Se si prenda t per variabile indipendente gli integrali potranno essere i valori delle x, y, z, u espressi per t, e più si potranno assoggettare a ricevere dei valori particolari per $t = t_0$. Ora qualunque sia il numero delle variabili principali x, y, z, u il Cauchy nel tomo I.° degli *Exercices d'Analyse* nel 1840 pag. 52, e seg. risolve completamente una tal questione per mezzo del Calcolo dei residui, ed ove l' estrazione dei residui si riferisce ad una certa equazione caratteristica espressa per un *determinante,* e che nel caso di quattro variabili principali si riporta all' equazione (7) del Sig. Catalan. Di più nello stesso volume degli *Exercices d'Analyse* di Cauchy trovasi un' altra Memoria sull' integrazione dell' Equazioni differenziali pag. 327 e seg.: fra le applicazioni del metodo generale il Cauchy sceglie un sistema di equazioni differenziali della forma lineare

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \dots = dt$$

Qui pure l' autore dopo di aver ritrovato un' equazione in k rappresentata da un *determinante,* dice che gli integrali generali delle equazioni differenziali sono tutti compresi nella formola da esso notata col n.° 54, cioè

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \dots = (\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta + \dots) e^{k(\tau - t)}$$

ove τ è un valore particolare di t per il quale le x, y, z si riducano a $\xi, \eta, \zeta \dots$, e le λ, μ, ν sono dipendenti per altrettante equazioni lineari aventi per coefficienti quei delle P, Q, R, S e per secondi membri i prodotti $k\lambda$, $k\mu$, $k\nu \dots$ ove k è una radice dell' equazione caratteristica somigliante alla (7) del Sig. Catalan. La formola (54)

del Cauchy pare che sia analoga all'equazioni (8) del sig. Catalan: proseguendo il Cauchy ad altre applicazioni suppone ancora, che le funzioni lineari P, Q, R, S... siano aumentate di una funzione della variabile indipendente t, e svolge in formole somiglianti gli integrali generali delle nuove equazioni differenziali.

Vengo ora ad indicare brevemente, quali siano le mie ricerche sullo stesso soggetto. Negli anni 1842; 1843 in una serie di lunghe Memorie pubblicate nel giornale arcadico mi proposi generalmente di applicare il Calcolo dei Residui del Cauchy all'integrazione generale dell'Equazioni lineari e per rendere le formole più eleganti, e simmetriche feci anche uso dell'analogia delle potenze con le differenze, così nella Memoria sull'integrazione dell'Equazioni differenziali pubblicata nel giornale arcadico nel 1842, mi proposi d'integrare l'equazioni simultanee sotto la forma simbolica

$$(D_t + a_0)\,x + a_1 y + a_2 z + \ldots = X\,, \qquad b_0 x + (D_t + b_1)\,y + b_2 z + \ldots = Y$$
$$c_0 x + c_1 y + (D_t + c_2)\,z + \ldots = Z$$

ove X, Y, Z... sono funzioni dell'indipendente t e per le derivate si ha

$$\frac{dx}{dt} = D_t x\,, \qquad \frac{dy}{dt} = D_t y\,, \qquad \frac{dz}{dt} = D_t z \ldots,$$

I valori di x, y, z..., sotto forma simbolica si otterranno dalla risoluzione di n equazioni con n incognite al primo grado, quindi notando con $F(D_t)$ il *determinante* simbolico formato con gli elementi

$$\left|\begin{array}{l} D_t + a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots, \\ b_0,\ D_t + b_1,\ b_2 \ldots, \\ c_0,\ c_1,\ D_t + c_2 \ldots, \end{array}\right|$$

otterremo un risultato della forma

$$x = \frac{LX + MY + NZ}{F(D_t)} \ldots\ldots \quad y = \ldots \quad z = \ldots$$

ove L, M, N... sono funzioni intere della caratteristica D_t ed inferiori almeno di un grado del determinante $F(D_t)$. Il Calcolo dei residui porge una formola per la decomposizione di una frazione composta in frazioni semplici: pel nostro caso avremo a decomporre la funzione razionale simbolica, e si avrà per i valori di x, y, z....

$$x = \mathcal{E}\,\frac{L_0 X + M_0 y + N_0 P \ldots}{(D_t - r)\,[F(r)]}\,, \quad y = \ldots$$

L_0, M_0, N_0... sono ciò che divengono le L, M, N per la sostituzione di r invece di

D_t, e $F(r)$ sarà il determinante della forma precedente con fare la stessa sostituzione, e dà origine ad un'equazione $F(r) = 0$ del grado corrispondente al numero delle variabili principali. Ora è chiaro che le frazioni simboliche

$$\frac{X}{D_t - r}, \quad \frac{Y}{D_t - r}, \quad \frac{Z}{D_t - r} \ldots$$

saranno gli integrali dell'equazioni differenziali

$$(D_t - r)\xi = X, \quad (D_t - r)\eta = Y, \quad (D_t - r)\zeta = Z \ldots$$

Questi integrali saranno della forma

$$\xi = e^{rt}(\varphi(r) + \int e^{-rt} X dt)$$

e se vogliamo inoltre che per $t = t_0$ si abbia $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma \ldots$ si trova per le funzioni arbitrarie $\varphi(r) \ldots$

$$\varphi(r) = \alpha e^{-rt_0} \ldots,$$

Integrando inoltre fra i limiti $t = t_0$, $t = t$ e chiamando $X_1 \ldots$ ciò che divengano le $X \ldots$ per la sostituzione di τ invece di t avremo

$$\xi = \alpha e^{r(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{r(t-\tau)} X_1 d\tau, \quad \eta = \ldots, \quad \zeta = \ldots,$$

Per ulteriori sviluppi si può consultare la mia citata Memoria, e terminerò questa breve nota con osservare che quando sia $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0 \ldots$ i valori di $x, y, z \ldots$ potranno essere espressi sotto le formole simboliche

$$x = (\alpha L + \beta M + \gamma N + \ldots)\Theta, \quad y = \ldots$$

ove si prenda

$$\Theta = \mathcal{E} \frac{e^{r(t-t_0)}}{[F(r)]}$$

I valori di $x, y, z \ldots$ soddisfano all'equazioni differenziali simultanee, e per $t = t_0$ si riducono ad $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, e più la funzione Θ verificherà l'equazione differenziale

$$F(D_t)\Theta = 0$$

e per $t = t_0$ $\quad \Theta = 0 \quad D_t\Theta = 0, \quad D_t^2\Theta = 0, \quad D_t^{n-1}\Theta = 1$

l'estrazione dei residui si deve estendere a tutte le radici dell'equazione $F(r) = 0$. Per l'integrazione delle equazioni differenziali simultanee si può anche consultare l'opera di G. Boole *differential equations*, Cambridge 1859 pag. 295, ed anche l'opera del Sig. Carmichael *the calculus of operations* London 1855 pag. 67 e seg.

BARNABA TORTOLINI.

DEGLI INVARIANTI E COVARIANTI

DELLE FORME BINARIE

ED IN PARTICOLARE DI QUELLE DI 3° E 4° GRADO

PER F. SIACCI

I.

1. La teoria degl' invarianti si può dire originata da una Memoria del prof. Boole (*) intorno al seguente teorema « In una equazione algebrica, in luogo » di x si sostituisca $x:y$, e sia $V=0$, la condizione affinchè essa abbia due ra- » dici eguali. Se liberata l'equazione dalle frazioni, in luogo di x si pone $\alpha x+\beta y$, » in luogo di y si sostituisce $\alpha_1 x+\beta_1 y$, e si forma coi coefficienti della trasfor- » mata una funzione V' analoga alla V, si ha $V'=\mu V$ dove μ è una certa quantità » dipendente unicamente da α, β, α_1, β_1 ». La verità di questo teorema apparisce chiararamente a chi considera, che se la primitiva equazione ha un fattore quadrato, dovrà averlo eziandio la trasformata, e per conseguenza avendosi $V'=0$, V dovrà essere fattore di V'. D'altronde i coefficienti della trasformata essendo funzioni lineari dei coefficienti dell'equazione primitiva, l'altro fattore non potrà essere che una funzione di α, β, α_1, β_1.

Dietro le importanti proprietà trovate nella funzione V, il sig. Cayley si propose di determinare *a priori*, quali funzioni possedevano questa qualità dell'*invariabilità*: cioè quando una funzione omogenea sia linearmente trasformata, quali funzioni dei nuovi coefficienti siano eguali all'analoghe dei primitivi, moltiplicate per una quantità indipendente da queste. E trovò che molte altre funzioni godevano di tal proprietà oltre quella considerata dal Boole. Tali funzioni furono gl' *invarianti* (**).

(*) *Cambridge Mathematical Journal. November* 1841.

(**) Il Cayley le chiamò *Iperdeterminanti*: l'altro nome più significativo l'acquistarono dopo.

In seguito trovò più generalmente per una funzione omogenea a un numero qualunque di variabili, che esistevano funzioni delle stesse variabili, che godevano proprietà analoghe a quelle degl'*invarianti*, cioè che chiamando $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i coefficienti di una funzione per es. $f(x, y, z)$ a tre variabili, ed $A_0, A_1, A_2, \ldots$ i coefficienti della trasformata

$$f(\alpha x + \beta y + \gamma z,\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)$$

si potevano avere delle funzioni φ soddisfacenti alla condizione

$$\varphi(X, Y, Z, A_0, A_1, A_2, \ldots) = \mu\, \varphi(x, y, z, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

dove, come negl'*invarianti*,

$$\mu = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^p$$

Queste funzioni furono i *covarianti* (*).

È facile vedere come negl'invarianti e covarianti doveano avere un riscontro importanti fatti geometrici ed analitici. In geometria analitica infatti un invariante rappresenta una proprietà di una data curva, indipendente dalla scelta degli assi, come p. es. l' avere un punto doppio ecc.; un covariante esprime un'altra curva, la quale gode di certe relazioni colla curva rappresentata dalla funzione primitiva, che non cambiano col cambiare degli assi. Nell'equazioni algebriche è manifesto come gl'invarianti debbano entrare nella condizione di esistenza delle radici immaginarie, nella condizione di esistenza di radici eguali, ecc.

Io mi propongo in questo scritto di riassumere con facili dimostrazioni alcuni dei principali metodi per ottenere gl'invarianti e i covarianti di una forma binaria nonchè alcune proprietà delle forme binarie di 3.° e 4.° grado.

2. Dalla natura stessa degli invarianti, si deduce la loro proprietà caratteristica di essere funzioni omogenee dei coefficienti della funzione proposta. Infatti siccome i coefficienti della trasformata sono funzioni omogenee e dello stesso grado rispetto ad α, β, α_1 β_1, affinchè tutti i termini dell'invariante trasformato abbiano lo stesso fattore omogeneo μ è necessario che sieno tutti dello stesso grado. Inoltre *se in una binaria di grado* n, a_0, a_1, a_2, ... a_r *sono i coefficienti dei termini che contengono la* y *al grado* 0, 1, 2 .... r, *la somma degl'indici in ogni*

(*) Il determinante di cui μ è una potenza dicesi *modulo* della sostituzione, e la sostituzione dicesi *unimodulare* quando il modulo = 1.

termine di un invariante del grado m *nei coefficienti della funzione, è costante ed uguale ad* $\frac{\mathrm{mn}}{2}$.

Sia infatti la funzione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1}y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots a_n y^n.$$

In luogo di x sostituiamo ρx; l'invariante I, fatta astrazione da una potenza di ρ, non cambierà di valore. Parimenti se oltre la fatta sostituzione poniamo altresì $\rho^r a_r$ in luogo di a_r l'invariante della nuova funzione sara uguale ad I moltiplicato per una potenza di ρ. Quindi l'invariante di

$$a_0 (\rho x)^n + a_1 (\rho x)^{n-1} y + a_2 (\rho x)^{n-2} y^2 + \ldots a_n y^n$$

sarà uguale all'invariante corrispondente di

$$a_0 (\rho x)^n + a_1 \rho(\rho x)^{n-1} y + a_2 \rho^2(\rho x)^{n-2} y^2 + \ldots \rho^n a_n y^n$$

moltiplicato per una potenza di ρ. Ma l'invariante di quest'ultima funzione si trae dall'invariante I, moltiplicandolo per una potenza di ρ, e sostituendo $\rho^r a_r$ in luogo di a_r: l'invariante I adunque avrà la somma degl'indici di ciascun termine costante. Inoltre l'invariante, salvo il segno, rimarrà inalterato se cambiamo x in y, ed y in x. Ma l'effetto di tale cambiamento, è come cambiare a_r in a_{n-r}. E perciò se α, β, γ ... sono gl'indici in un termine dell'invariante si avrà

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots . = (n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) + \ldots .$$

donde

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \frac{mn}{2}$$

Quindi se chiamiamo la somma degl'indici in un termine di un invariante *ordine* dell'invariante stesso, potremo formulare il seguente teorema:

Un invariante qualunque di una funzione di grado n *è omogeneo in grado e in ordine rispetto ai coefficienti della funzione; e se* m *è il grado dell'invariante, l'ordine è* $\frac{\mathrm{mn}}{2}$.

3. Quanto ai covarianti, siccome un covariante è omogeneo non solo rispetto alle variabili, ma anco rispetto ai coefficienti della funzione originale, esso rimarrà inalterato, salvo una potenza di ρ, se noi cambiamo x in ρx e a_r in $\rho^r a_r$; quindi se $a_\alpha\, a_\beta\, a_\gamma$ è il coefficiente di x^μ nel covariante dovrà essere costante la somma

$$\mu + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

D'altra parte siccome il valore del covariante, salvo il segno, non cambia se in

luogo di a_r si pone a_{n-r}, si avrà

$$\mu + \alpha + \beta + \gamma + \ldots = (n' - \mu) + (n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) + \ldots$$

donde

$$\mu + \alpha + \beta + \gamma + \ldots = \tfrac{1}{2}(mn + n')$$

dove n' è il grado in x, y del covariante. Donde ricaviamo l'altro teorema:

L'ordine di ciascun termine di un covariante è costante ed uguale ad $\frac{1}{2}$ (mn + n') *essendo* n *il grado della funzione originale*, n' *quello del covariante, ed* m *il grado del covariante rispetto ai coefficienti di essa funzione.*

4. Il teorema del § 2. ci abilita a scrivere la parte letterale di un invariante di grado determinato.

Si voglia per esempio l'invariante di quarto grado di una cubica.

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Il suo ordine sarà $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Esso sarà adunque della forma

$$A\, a_3 a_3 a_0 a_0 + B\, a_3 a_2 a_1 a_0 + C\, a_3 a_1 a_1 a_1 + D\, a_2 a_2 a_2 a_0 + E\, a_2 a_2 a_1 a_1$$

In generale l'invariante di grado m di una funzione di grado n, sarà composto di tanti termini, quanti sono i diversi modi, in cui il numero $\frac{mn}{2}$ può essere spezzato in m numeri da o ad n inclusivamente.

Vediamo ora come si possono determinare i coefficienti dei diversi termini di un invariante.

5. Le condizioni a cui dee soddisfare un invariante si possono ridurre alle due seguenti.

1.° Se in una funzione ad x si sostituisce $x + \lambda y$ lasciando y inalterata, essendo 1 il modulo di trasformazione, l'invariante non dee cambiar di valore.

2.° Se in una funzione ad y si sostituisce $y + \mu x$ lasciando x inalterata, l'invariante non dee cangiar di valore.

Ora sia la funzione

$$(1) \qquad a_0 x^n + n\, a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots a_n y^n$$

se in questa facciamo la prima sostituzione avremo

$$a_0 x^n + n\,(a_1 + \lambda a_0)\, x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0)\, x^{n-2} y^2 + \ldots .$$

e l'invariante I della (1) si trasformerà nel corrispondente I' di quest'ultima funzione, scrivendo $a_1 + \lambda a_0$ in luogo di a_0, $a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0$ in luogo di a_2, ecc. Se ora sviluppiamo I' secondo il teorema di Taylor ed ordiniamo la serie ri-

spetto a λ, i coefficienti delle diverse potenze di λ dovranno tutti essere eguali a zero. E considerando il coefficiente di λ, dovrà aversi primieramente

$$(2) \quad a_0 \frac{dI}{da_1} + 2a_1 \frac{dI}{da_2} + 3a_2 \frac{dI}{da_3} + \dots n a_{n-1} \frac{dI}{da_n} = 0$$

Ora se questa condizione si verifica, si annulleranno tutti gli altri coefficienti di λ^2, λ^3, ecc. Infatti il coefficiente di λ^2 è

$$a_0 \frac{dI}{da_2} + 3a_1 \frac{dI}{da_3} + 6a_2 \frac{dI}{da_4} + \dots + \frac{1}{1.2}\left(a_0 \frac{d}{da} + 2a_1 \frac{d}{da} + \dots\right)^2 I,$$

e questo è precisamente

$$\frac{1}{1.2}\left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} \dots\right)\left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} \dots\right) I.$$

In pari maniera si troverebbe che il coefficiente di λ^r è proporzionale ad

$$\left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots\right)^{r-1}\left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots\right) I$$

Donde si trae, che la (2) sarà condizione necessaria e sufficiente perchè sostituita $x + \lambda y$ in luogo di x, I non cambi. Analogamente la condizione perchè la I non cambi sostituendo $y + \mu x$ in luogo di y, sarà

$$(3) \quad n a_1 \frac{dI}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{dI}{da_1} + \dots\dots a_n \frac{dI}{da_{n-1}} = 0$$

Le condizioni (2) e (3) si possono ridurre ad una sola; giacchè siccome la funzione (1) non cambia, scambiando le variabili fra loro, la I non cambierà di valore se si cambia a_r in a_{n-r}. (*)

5. L'equazione (2), mentre ci dà le condizioni a cui dee soddisfare l'invariante I ci offre il destro di determinare i coefficienti numerici di un invariante di ordine qualunque.

Abbiamo infatti trovato

$$A a_3^2 a_0^2 + B a_3 a_2 a_1 a_0 + C a_3 a_1^3 + D a_2^3 a_0 + E a_2^2 a_1^2$$

Operando col simbolo

$$a_0 \frac{dI}{da_1} + 2a_1 \frac{dI}{da_2} + 3a_2 \frac{dI}{da_3}$$

(*) Dell'equazione (2) si trae immediatamente che la somma dei coefficienti numerici dell'invariante è $= 0$. Essa integrata ci darebbe tutti gl'invarianti della funzione.

abbiamo

$$(B+6A)a_3a_2a_0^2+(3C+2B)a_3a_1^2a_0+(2E+6D+3B)a_2^2a_1a_0+(4E+3C)a_1^4=0$$

ed eguagliando a 0 il coefficiente di ogni termine e prendendo $A=1$ si ha

$$B=-6, \quad C=4, \quad D=4, \quad E=-3$$

L'invariante di terzo grado di una biquadratica è

$$A\,a_4a_2a_0+B\,a_4a_1^2+C\,a_3^2a_0+D\,a_3a_2a_1+E\,a_2^3$$

ed operando col simbolo

$$a_0\frac{d}{da_1}+2a_1\frac{d}{da_2}+3a_2\frac{d}{da_3}+4a_3\frac{d}{da_4}$$

si trova

$$(2B+2A)a_4a_1a_0+(D+6C+4A)a_3a_2a_0+(2D+4B)a_3a_1^2+(6E+3D)a_2^2a_1=0$$

donde

$$A=1, \quad B=-1, \quad D=2, \quad E=-1, \quad C=-1.$$

6. Il Cayley dal teorema superiore e dall'equazione (2) ha ricavato una formola che può dare il numero di invarianti indipendenti ammessi da una funzione di un dato ordine. Ecco il suo ragionamento.

Nel formare l'invariante di un dato ordine col principio dell'omogeneità del grado e dell'ordine noi abbiamo un certo numero di coefficienti incogniti da determinare, e questo numero è pari al numero di maniere in cui il numero $\frac{mn}{2}$ può essere spezzato in m numeri interi da 0 ad n. Sia

$$\left[\frac{mn}{2}\right]_{m,n}$$

questo numero. L'equazione (2) è composta di un certo numero di termini di grado m rispetto ai coefficienti della funzione e di ordine $\frac{mn}{2}-1$, e perciò il detto numero sara

$$\left[\frac{mn}{2}-1\right]_{m,n}$$

Tante adunque saranno le equazioni fornite dalla (2) per determinare i coefficienti numerici dell'invariante. Ma (uno di tali coefficienti può sempre porsi uguale all'unità) il numero dell'equazioni necessarie deve essere

$$\left[\frac{mn}{2}\right]_{m,n}-1$$

Laonde il numero d'invarianti indipendenti, che ammette una funzione di grado ennesimo sarà dato dal numero di soluzioni in numeri interi e positivi rispetto ad m dell'equazione

$$\left[\frac{mn}{2}\right]_{m,n}-1=\left[\frac{mn}{2}-1\right]_{m,n}.$$

La ricerca degl'invarianti con questo metodo riesce alquanto laboriosa. Noi ci contenteremo di ricercare l' invariante di 2.° grado di una funzione di grado ennesimo. Da quest'invariante, col sussidio dei covarianti, troveremo invarianti di grado superiore.

7. L'invariante di 2.° grado della funzione

$$a_0 x^n + n\, a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

è della forma

$$A\, a_0 a_n + B\, a_1 a_{n-1} + C\, a_2 a_{n-2} + \ldots$$

Se n è impari si avrà

$$\left[\frac{mn}{2}\right]_{m,n} - 1, = \frac{n-1}{2}, \quad \left[\frac{mn}{2} - 1\right]_{m,n} = \frac{n+1}{2}$$

Quindi una funzione di grado impari non ammette invarianti di 2.° grado. Se n è pari si ha

$$\left[\frac{mn}{2}\right]_{m,n} - 1 = \left[\frac{mn}{2} - 1\right]_{m,n} = \frac{n}{2}$$

Cambiamo adunque l'n in $2p$, e scriviamo l'invariante cercato così:

$$I = A\, a_0 a_{2p} + B\, a_1 a_{2p-1} + C\, a_2 a_{2p-2} + \ldots + M a_{p-1} a_{p+1} + N\, a_p^2$$

l'equazione (2) applicata a quest'invariante dà

$$2p\, A + B = 0 \qquad (2p-1)\, B + 2\, C = 0 \qquad (2p-2)\, C + 3\, D = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(p+1)\, M + 2p N = 0$$

donde

$$A = 1,\ B = -2p,\ C = \frac{2p\,(2p-1)}{1.\ 2},\ D = -\frac{2p\,(2p-1)(2p-2)}{1.\ 2.\ 3}\ \ldots..$$

$$N = \pm \frac{(2p-1)\ .\ .\ .\ (p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ p-1}.$$

Perciò l'invariante cercato sarà

$$(4) \quad a_2 a_{2p} - 2p\, a_1 a_{2p-1} + \frac{2p\,(2p-1)}{1.2} a_2 a_{2p-2} + \ldots \pm \frac{(2p-1)\ldots(p+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots p-1} a_p^2.$$

Per una funzione di 2.° grado si avrà adunque

$$a_0 a_2 - a_1^2.$$

Per una di 4.°:

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

Per una di 6° grado:

$$a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2 ; \text{ ecc.}$$

Ora vediamo come si possa da un invariante ricavare un covariante.

8. Se in una funzione U noi ad x sostituiamo $x + \lambda x'$, ad y sostituiamo $y + \lambda y'$ e quindi sviluppiamo, i coefficienti delle diverse potenze di λ saranno della forma

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^p U.$$

Questi coefficienti, dove x' y' sono *congredienti* ad x ed y, ossia si trasformano con analoghe sostituzioni, si chiamano gli *emananti* della funzione U. Ora è facile provare come ogni emanante sia un covariante.

Infatti facciamo in luogo di x, y, x', y' le solite sostituzioni lineari, siccome si hanno le identità

$$x + \lambda x' = \alpha (X + \lambda X') + \beta (Y + \lambda Y')$$

$$y + \lambda y' = \alpha_1 (X + \lambda X') + \beta_1 (Y + \lambda Y')$$

se ha luogo

$$f(x, y) = F(X, Y)$$

si avrà eziandio

$$f(x + \lambda x', y + \lambda y') = F(X + \lambda X', Y + \lambda Y')$$

e sviluppando col teorema di Taylor, siccome λ è un'indeterminata dovrà aversi

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^p f = \left(X' \frac{d}{dX} + Y' \frac{d}{dY}\right)^p F$$

come doveasi dimostrare.

Ora supponiamo costanti le x, y e variabili le x', y'; se facciamo unicamente in x', y' le solite sostituzioni avremo

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^p f = a X'^p + p b X'^{p-1} Y + \ldots.$$

ove a, b, ... sono funzioni di x, y, che divengono rispettivamente

$$\frac{d^p F}{d X^p}, \quad \frac{d^p F}{d X^{p-1} d Y}, \ldots$$

quando x, y, sono linearmente trasformate.

Se ora I è un invariante, si avrà

$$I\left(\frac{d^p f}{d x^p}, \quad \frac{d^p f}{dx^{p-1} dy} \ldots.\right) = \frac{1}{M^q} I(a, b, \ldots)$$

essendo M il modulo della sostituzione

$$x' = \alpha X' + \beta Y' \ , \quad y' = \alpha_1 X' + \beta_1 Y';$$

facciamo le sostituzioni anco in x ed y avremo l'identità

$$I\ (a,\ b\ldots) = I\left(\frac{d^p F}{d X^p},\ \frac{d^p F}{d X^{p-1} d Y}\ldots\ldots\right);$$

adunque

$$I\left(\frac{d^p f}{d x^p},\ \frac{d^p f}{d x^{p-1} d y},\ldots\ldots\right) = \frac{1}{M^q}\ I\left(\frac{d^p F}{d X},\ \frac{d^p F}{d X^{p-1} d Y},\ \ldots\ldots\right).$$

Quindi il teorema:

Se I *è un invariante di un emanante, considerate costanti le* x, y *e variabili le* x', y'*; esso sarà un covariante della funzione originale, quando* x, y *sono considerate come variabili.*

9. Abbiamo trovato l'invariante di secondo grado di una funzione di grado $2p$, essere

$$(4)\quad a_0 a_{2p} - 2p\, a_1 a_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} a_2 a_{2p-2} - \ldots\ldots \pm \frac{(2p-1)\ \ldots\ (p+1)}{1.2.3\ldots p-1}\, a_p^2$$

a questo invariante in virtù dell'ultimo teorema corrisponde il seguente covariante di una funzione U di grado qualunque

$$(5)\quad \frac{d^{2p}U}{dx^{2p}}\frac{d^{2p}U}{dy^{2p}} - 2p\,\frac{d^{2p}U}{dx^{2p-1}dy}\,\frac{d^{2p}U}{dx_{,}dy^{2p-1}} + \frac{2p\,(2p-1)}{1.\ 2}\,\frac{d^{2p}U}{dx^{2p-2}dp^2}\,\frac{d^{2p}U}{dx^2\,dy^{2p-1}}$$

$$+\ \ldots\ldots \pm \frac{(2p-1)(2p-2)\ldots\ldots(p+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots p-1}\left(\frac{d^p U}{dx^p\,dy^p}\right)^2$$

Per $p = 1$ si ha

$$\frac{d^2 U}{d x^2}\,\frac{d^2 U}{d y^2} - \left(\frac{d^2 U}{d x\, d y}\right)^2.$$

Questo covariante dicesi l'*Hessiano* della funzione U. E evidente che se U è del grado *n*, l'*Hessiano* sarà una funzione di grado $2(n-2)$ nelle variabili e di 2.° grado nei coefficienti.

In generale il covariante (5) sarà del grado $2(n-2p)$ rispetto alle variabili ed avrà i coefficienti di grado 2.° rispetto ai coefficienti della funzione originale.

Egli è evidente che il covariante superiore non è applicabile, che a funzioni di grado superiore a $2p$; applicato a funzioni del grado $2p$, tornerebbe l'invariante di 2.° grado già trovato.

Siccome un invariante e un covariante di un covariante è un invariante e un covariante della funzione originale, si vede come dall'associazione del covariante

(5) e dell'invariante (4) si possa far nascere una serie indefinita di invarianti e covarianti.

Tutti però quest'invarianti e covarianti sono di grado 2^m rispetto ai coefficienti. Vediamo come si possano ricavare invarianti e covarianti di altri gradi.

10. Sia una funzione $\varphi(x, y)$ di grado n, che per sostituzioni lineari divenga $\Phi(X, Y)$. Cerchiamo i valori di $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}$ in funzione di $\frac{d\Phi}{dX}, \frac{d\Phi}{dY}$. Dall'equazioni

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \alpha_1 X + \beta_1 Y$$
$$M = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$$

avendosi

$$X = \frac{1}{M}(\beta_1 x - \beta y), \quad Y = \frac{1}{M}(-\alpha_1 x + \alpha y)$$

si ricava facilmente

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{M}\left(\beta_1 \frac{d\Phi}{dX} - \alpha_1 \frac{d\Phi}{dY}\right), \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{M}\left(-\beta\frac{d\Phi}{dX} + \alpha\frac{d\Phi}{dY}\right)$$

le quali equazioni possono essere scritte così

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{M}\left[\alpha\frac{d}{dY} + \beta\left(-\frac{d}{dX}\right)\right]; \quad -\frac{d}{dx} = \frac{1}{M}\left[\alpha_1\frac{d}{dY} + \beta_1\left(-\frac{d}{dX}\right)\right].$$

Ora è facile ricavare da queste equazioni le seguenti relazioni simboliche

$$\frac{d^p}{dy^p} = \frac{1}{M^p}\left[\alpha\frac{d}{dY} + \beta\left(-\frac{d}{dX}\right)\right]^p; \quad (-1)^q\frac{d^q}{dx^q} = \frac{1}{M^q}\left[\alpha_1\frac{d}{dY} + \beta_1\left(-\frac{d}{dX}\right)\right]^q$$

$$(-1)^q\frac{d^{p+q}}{dy^p\,dx^q} = \frac{1}{M^{p+q}}\left[\alpha\frac{d}{dY} + \beta\left(-\frac{d}{dX}\right)\right]^p\left[\alpha_1\frac{d}{dY} + \beta_1\left(-\frac{d}{dX}\right)\right]^q$$

donde si vede, che se ha luogo la relazione

$$f(x, y) = F(X, Y)$$

si avrà ancora

$$f\left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{M^n}F\left(\frac{d}{dY}, -\frac{d}{dX}\right)$$

ove i simboli

$$\frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dY}, \quad \frac{d}{dX}$$

sono applicabili a funzioni diverse da f e F. Se con $f(x, y)$ si denota la funzione (1) ed i simboli $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ si applicano alla stessa funzione, si otterrà l'in-

variante di 2.° grado già trovato. Ma se quei simboli si applicano ad un covariante di f, di grado maggiore od eguale ad f si avrà un altro covariante di f, ovvero un invariante.

Così l'Hessiano di una funzione di quarto grado $a x^4 + 4 b x^3 y + \dots$ è

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3 y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2 y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4$$

ed operando su questo col simbolo

$$a_0 \frac{d^4}{dx^4} + 3\, b_1 \frac{d^4}{dx^3\, dy} + \dots$$

si ha l'invariante

$$ace + 2\, bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

In virtù del teorema del § 8. possiamo convertire questo invariante nel covariante

$$\frac{d^4 U}{d x^4}\frac{d^4 U}{d y^4}\frac{d^4 U}{dx^2\, dy^2} + 2\frac{d^4 U}{dx^3\, dy}\frac{d^4 U}{dx\, dy^3}\frac{d^4 U}{dx^2\, dy^2} - \text{ecc.}$$

11. Finalmente abbiamo una fonte anche più feconda di covarianti negli *evettanti*.

Se in luogo di x', y' e di x, y si fanno sostituzioni lineari analoghe, si ha

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}.$$

Se adunque la funzione $f(x, y)$ per sostituzioni lineari diviene $F(X, Y)$, è evidente che si avrà ancora

$$f(x,y) + \lambda\,(xy' - x'y)^n = F(X, Y) + \lambda'\,(XY' - X'Y)^n$$

il cui primo membro sviluppato dà

$$(a_0 + \lambda y'^n)\, x^n + n\, x^{n-1} y\, (a_1 - \lambda y'^{n-1} x') + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 (a_2 + \lambda y'^{n-2} x'^2) + \text{ecc.}$$

Sia ora I un invariante della $f(x, y)$; il corrispondente invariante I' di questa funzione si otterrà da I sostituendovi in luogo di a_0, $a_0 + \lambda y^n$, in luogo di a_1, $a_1 - \lambda y'^{n-1} x'$, ecc., e perciò si avrà

$$I' = I + \lambda \left(y'^n \frac{d}{d a_0} - y'^{n-1}\, x' \frac{d}{d a_1} + \text{ecc.} \right) I + \text{ecc.}$$

che è eguale alla corrispondente funzione delle variabili X', Y' e dei coefficienti A_0, A_1 ecc. di F(X, Y); eguagliando adunque i coefficienti di λ, e togliendo gli accenti ricaviamo che

$$\left(y^n \frac{d}{d a_0} - y^{n-1}\, x \frac{d}{d a_1} + \dots \right)^p I$$

trasformato linearmente si cambia in una funzione di simile forma rispetto ad $F(X, Y)$. Cioè è un covariante. Esso dicesi *evettante* dell'invariante I.

12. Abbiamo osservato al principio del § 11. che il binomio $xy_1 - x_1y$ ove x, y, x_1, y_1 sono variabili congredienti, si trasforma in $M(XY_1 - X_1Y)$. Questa osservazione ci pone in grado di formare degl'invarianti e dei covarianti per mezzo delle radici della binaria.

Infatti la binaria U si può mettere sotto la forma

$$(xy_1 - x_1y)(xy_2 - x_2y) \ldots . (xy_n - x_ny)$$

ove $x_1 : y_1$, $x_2 : y_2 \ldots . x_n : y_n$ sono le radici della binaria. Per la detta osservazione se nella U presentata sotto questa forma dove $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots . x_n, y_n$ sono congredienti, si fanno le sostituzioni lineari, si avrà

$$M^n(XY_1 - X_1Y)(XY_2 - X_2Y) \ . \ . \ . \ (XY_n - X_nY).$$

Adunque il binomio $xy_r - x_ry$ sarà un covariante di U. Similmente si vede che una funzione omogenea di quantità della forma del detto binomio sarà altresì un covariante, e sarà un invariante se composta di fattori della forma $x_ry_s - x_sy_r$, essendo $x_r : y_r$, $x_s : y_s$ radici della U.

Ora una espressione composta di fattori simili ad $x_ry_s - x_sy_r$ si ottiene quando in una funzione simmetrica delle differenze delle radici di un'equazione funzione contenente in ogni suo termine ciascuna radice lo stesso numero di volte, si sostituiscano in luogo delle radici α, β, γ .... i rapporti $x_1 : y_1$, $x_2 : y_2$, $x_3 : y_3$ ... e si moltiplichi il risultato per una potenza conveniente di a_0. Adunque:

Una funzione simmetrica delle radici di un'equazione darà luogo ad un invariante della binaria corrispondente, se ciascuna radice entra lo stesso numero di volte in ciascun termine della funzione.

Così se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono le radici dell'equazione

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + ex^4 ,$$

e se I_2 I_3 esprimono gl'invarianti quadratico e cubico della binaria corrispondente si ha

$$\frac{1}{a^2} I_2 = \sum (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2$$

$$\frac{1}{a^3} I_3 = \sum (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 \left[(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) \right] .$$

Può anche dimostrarsi facilmente che una funzione della forma

$$\sum (x - \alpha)^m(\beta - \gamma)^m \text{ ecc.}$$

ove ciascuna radice entra lo stesso numero di volte in ogni termine, dà luogo ad un covariante.

Così l'*Hessiano* di una forma binaria di 3.° grado è

$$\sum (x-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2.$$

13. Indicherò finalmente il secondo metodo per rinvenire invarianti e covarianti, usato dal Cayley fin dalle sue prime ricerche su tal soggetto, metodo che dà luogo ad un algoritmo speciale, ed a conseguenze importantissime.

Siano le due funzioni

$$U_1 = f(x_1, y_1) \qquad V_2 = \varphi(x_2, y_2)$$

e s'indichino le derivate parziali della prima con $\frac{1d}{dx}, \frac{1d}{dy}$, quelle della seconda con $\frac{2d}{dx}, \frac{2d}{dy}$. Ora abbiam veduto che se $x_1 y_1$ sono congredienti con $x_2 y_2$ si ha

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) = M(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$$

Da questa equazione tenendo conto di quanto si è osservàto nel § 9, discende la simbolica relazione

$$\begin{vmatrix} \frac{1d}{dx} & \frac{1d}{dy} \\ \frac{2d}{dx} & \frac{2d}{dy} \end{vmatrix}^m = \mu \begin{vmatrix} \frac{1d}{dX} & \frac{1d}{dY} \\ \frac{2d}{dX} & \frac{2d}{dY} \end{vmatrix}^m$$

Perciò il primo membro di questa equazione sarà un simbolo di operazione per ottenere invarianti e covarianti del sistema di funzioni U V, giacchè nelle funzioni risultanti non è più necessario ritenere gl'indici delle variabili. Se U e V sono funzioni identiche o di grado eguale si avranno invarianti se m è eguale al grado di U e di V; in ogni altro caso si avranno covarianti.

Il simbolo (1) si suole esprimere così $\overline{12}^m$. Ed è chiaro che il prodotto dei simboli $\overline{12}^m$, $\overline{23}^m$, $\overline{31}^m$... applicato a funzioni $U_1\ V_2\ W_3$... esprimerà eziandio invarianti e covarianti del sistema U V W...

Da tutto ciò si ricavano facilmente i seguenti corollari:

1.° il simbolo $\overline{12}^m$ applicato ad una funzione di grado m dà l'invariante (1) applicato ad una funzione di grado superiore dà il covariante (2);

2.° $\overline{12}^m = \overline{\alpha\beta}^m$ dove α, β sono cifre qualunque, e per conseguenza se m è impari avendosi nello stesso tempo $\overline{12}^m = -\overline{21}^m$, $\overline{12}^m = \overline{21}^m$, sarà $\overline{12}^m = 0$, come abbiam trovato per altra via;

3.° il simbolo $\overline{12}^a \times \overline{23}^b \times \overline{31}^c \times \overline{14}^d \times \ldots$ rappresenta invarianti e covarianti, il cui grado nei coefficienti sarà eguale al numero delle differenti cifre che entrano nel simbolo;

4.° il grado in x, ed y del covariante espresso dallo stesso prodotto di

simboli applicato ad U sarà $np - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$, se la cifra 1 occorre nel simbolo α volte, la cifra 2 β volte, la cifra 3 γ volte ecc. e p è il numero delle cifre differenti: donde segue che se vuolsi ottenere un invariante dovrà aversi $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = n$, cioè ogni cifra ripetuta lo stesso numero di volte, e questo numero dee essere eguale al grado della funzione.

Si voglia l'invariante del 3.° ordine della funzione U. Esso sarà della forma $(\overline{12}.\overline{23}.\overline{34})^{\frac{n}{2}}$. Quindi si vede che non si possono avere invarianti di 3.° grado da una funzione di grado impari. Inoltre se $\frac{n}{2}$ è impari, siccome nel simbolo cambiando due cifre tra loro cambia il segno del simbolo stesso, così le sole funzioni di grado $4m$ possono ammettere invarianti del 3.° ordine.

14. I principi stabiliti ci abilitano a provare un importante teorema del sig. Hermite che si suol denominare « Regola di reciprocità ».

Il numero d'invarianti di grado p *nei coefficienti, posseduti da una binaria di grado* n, *è eguale al numero di invarianti del grado* n *posseduti da una binaria dell'ordine* p.

Infatti se $\overline{12}^a.\overline{23}^b.\overline{34}^c\ldots$ è un invariante di grado p di una funzione del grado n, il numero delle figure 1, 2, 3... sarà p, e ciascuna di esse occorrerà n volte. Quindi potremo formare una funzione

$$\sum (\alpha-\beta)^a (\beta-\gamma)^b (\gamma-\delta)^c \ldots$$

ove ogni differenza $\alpha - \beta$ corrisponde a un simbolo $\overline{12}$. E questa funzione soddisferà alle condizioni accennate nel teorema del § 12, perchè dia luogo ad un invariante, e quest'invariante sarà del grado n, ed apparterrà ad una funzione del grado p, che ha per radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$

Così siccome una funzione di 4.° grado ha un'invariante del 2.° ed uno del 3.° grado, essa ammetterà tanti invarianti del grado p^{mo} quante sono le soluzioni intere dell'equazione $2x + 3y = p$, ed altrettanti saranno gl'invarianti di 4.° grado ammessi da una binaria dell'ordine p.

La regola di reciprocità dell'Hermite si estende facilmente anco ai covarianti.

Sia $\overline{12}^\lambda.\overline{34}^\mu.\overline{56}^\nu\ldots$ il simbolo di un covariante, ove le differenti cifre siano p di numero, la 1 sia ripetuta a volte, la 2 b volte, e così di seguito. Il covariante sarà di grado p nei coefficienti, di grado $(n-a)+(n-b)+\ldots$ rispetto alle variabili.

Formiamo ora la funzione corrispondente

$$\sum (\alpha-\beta)^\lambda (\beta-\gamma)^\mu (\gamma-\delta)^\nu \;.\;.\;.\; (x-\alpha)^{n-a} (x-\beta)^{n-b} \;.\;.\;.$$

Le quantità $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ sono evidentemente p di numero, ciascuna di esse è ripetuta n volte, ed è innalzata alla potenza massima n. Ora questa funzione

dà luogo ad un covariante di grado $(n-a)+(n-b)\ldots$ nelle variabili, di grado n nei coefficienti, ed appartenente ad una binaria dell'ordine p.

Quindi risulta, *che ad ogni covariante di una binaria dell'ordine n, di grado p nei coefficienti corrisponde sempre un covariante di grado n nei coefficienti di una funzione di grado p.*

II.

15. Il primo degl'invarianti osservati fu, come abbiamo accennato, quella tale funzione dei coefficienti di una binaria, che fatta $=0$, esprime la condizione di eguaglianza tra due almeno delle sue radici. Quest' invariante è precisamente il *discriminante* della binaria. La considerazione di esso è importantissima, anzi si può dire essenziale alla funzione stessa; così ci permetteremo di parlarne più particolarmente.

Sia la funzione

$$U = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \ldots..$$

se $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}\ldots$ sono le radici di questa funzione, il discriminante di esso sarà evidentemente espresso da

$$D = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 \ldots. (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 \ldots.$$

Infatti questa è una funzione intera ed omogenea dei coefficienti a_0, a_1, $a_2\ldots$ che si annulla per l'eguaglianza di due qualunque delle radici.

Questa espressione ci permette di presentare il discriminante in forma di determinante in funzione delle potenze delle radici della equazione corrispondente

$$f(t) = a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 t^{n-2} + \ldots = 0$$

Difatti se $\alpha, \beta, \gamma \ldots \chi$ sono le radici di questa equazione sarà

$$\frac{D}{a_0^{2(n-1)}} = (\alpha-\beta)^2 (\alpha-\gamma)^2 \ldots (\alpha-\chi)^2 (\beta-\gamma)^2 \ldots (\beta-\chi)^2 \ldots$$

Ora se estragghiamo la radice da ambi i membri, e sviluppiamo il secondo per la moltiplicazione dei suoi fattori, è evidente che uno dei termini di esso, fatta astrazione dal segno equivarrà al prodotto

$$\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots \chi^{n-1}$$

e tutti gli altri si ricaveranno da questo facendo tutte le possibili permutazioni tra le lettere α, β, $\gamma \ldots \chi$.

Ciò premesso ordiniamo lo sviluppo secondo le potenze ascendenti di α; avremo

$$\sqrt{\frac{1}{a_0^{2(n-1)}}}\,D = A_0 + A_1\,\alpha + A_2\,\alpha^2 + \ldots A_{n-1}\,\alpha^{n-1}$$

I coefficienti $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_{n-1}$ avranno la proprietà di annullare il primo membro di questa equazione, allorchè α viene surrogato da β, $\gamma \ldots \chi$; quindi

$$0 = A_0 + A_1\,\beta + A_2\,\beta^2 + \ldots A_{n-1}\,B^{n-1}$$
$$0 = A_0 + A_1\,\gamma + A_2\,\gamma^2 + \ldots A_{n-1}\,\gamma^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = A_0 + A_1\,\chi + A_2\,\chi + \ldots A_{n-1}\,\chi^{n-1}$$

Ora è evidente che $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_{n-1}$ sono i complementi algebrici della prima linea del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \beta & \beta^2 & \ldots & \beta^{n-1} \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \ldots & \gamma^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \chi & \chi^2 & \ldots & \chi^{n-1} \end{vmatrix}$$

e perciò $\frac{D}{a_0^{2(n-1)}}$ fatta astrazione da un coefficiente numerico sarà = al quadrato di questo determinante: perciò si avrà D proporzionale ad

$$a_0^{2(n-1)} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

dove s_r rappresenta la somma delle potenze erresime delle radici α, β, $\gamma \ldots \chi$. Questa espressione del discriminante ci permetterebbe di calcolarne il valore in funzione dei coefficienti della funzione. Siccome però il calcolo delle funzioni simmetriche è laborioso, si è ricorso ad altri principii in virtù dei quali la ricerca del discriminante si riduce ad un problema di eliminazione.

16. Osserviamo primieramente che se $f'(t)$ è la derivata di $f(t)$ il discriminante sarà proporzionale ad

$$f'(\alpha)\, f'(\beta)\, f'(\gamma)\; .\; .\; .\; f'(\chi)$$

Ora questa espressione è precisamente l'eliminante, ovvero il primo membro dell'equazione risultante dall'eliminazione di t, fra

$$f(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(t) = 0$$

Il che d'altronde è troppo evidente, giacchè per la definizione stessa del discriminante

$$D = 0$$

rappresenta la condizione perchè due radici siano eguali, ossia perchè abbiasi simultaneamente

$$f(t) = 0\,, \qquad f'(t) = 0$$

Si riprenda ora la U. È evidente che gli stessi valori che posti in luogo di t riducono a zero

$$f(t) \qquad \text{e} \qquad f'(t)$$

sostituiti in luogo di $\frac{x}{y}$ annulleranno anche

$$U \qquad \text{e} \qquad \frac{dU}{dx}$$

Ma in virtù di un teorema di Eulero si ha

$$nU = \frac{dU}{dx}\,x + \frac{dU}{dy}\,y,$$

dunque i valori che verificano

$$U = 0 \qquad \frac{dU}{dx} = 0$$

verificheranno eziandio

$$\frac{dU}{dy} = 0$$

E perciò la ricerca del discriminante si riduce all'eliminazione di x, ed y tra le due equazioni omogenee

$$\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \frac{dU}{dy} = 0$$

Quindi il discriminante di una binaria, ed in generale di una funzione omogenea si definisce : *Il risultamento dell'eliminazione delle variabili fra tutte le derivate parziali della funzione rispetto alle variabili stesse.*

17. Vi sono moltissimi metodi di eliminazione: il metodo dialitico del Sylvester ci permette di esprimere facilmente in forma di determinante, il discriminante della binaria U. Questo metodo che conduce agli stessi risultati del metodo di Eulero, ma più semplicemente, è il seguente :

Siano due equazioni omogenee di grado m ed n. Si moltiplichi la prima successivamente per x^{n-1}, $x^{n-2}y$, $x^{n-3}y^2 \dots y^{n-1}$, e l'altra per x^{m-1}, $x^{m-2}y$, $x^{m-3}y^2 \dots y^{m-1}$. Avremo $m+n$ equazioni. E se da queste eliminiamo

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2}y,\ x^{m+n-3}y^2 \dots \dots y^{m+n-1}$$

come altrettante incognite al primo grado, avremo nella risultante, la risultante delle due equazioni di grado m ed n.

Nel nostro caso le due equazioni sono

$$a_0 x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1} a_1 x^{n-2} y + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_2 x^{n-3} y^2 + \dots a_{n-1} y^{n-1} = 0$$

$$a_1 x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1} a_2 x^{n-2} y + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_3 x^{n-3} y^2 + \dots a_n \ \ y^{n-1} = 0$$

Se operiamo su queste due come è stato indicato si otterrà

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & \frac{n-1}{1} a_1 & . & a_{n-1} & 0 & . & 0 \\ 0 & a_0 & . & \frac{n-1}{1} a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \frac{n-1}{1} a_1 & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_2 & . & a_{n-1} \\ a_1 & \frac{n-1}{1} a_2 & . & a_n & 0 & . & 0 \\ 0 & a_1 & . & \frac{n-1}{1} a_{n-1} & a_n & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \frac{n-1}{1} a_1 & \frac{(n-1))n-2)}{1.2} a_3 & . & a_n \end{vmatrix}$$

E questa sarà in generale l'espressione del discriminante di una binaria.

Da quanto è stato detto di sopra si ricava agevolmente, che il grado del discriminante è sempre $2(n-1)$; e per conseguenza l'ordine rispetto agli indici è $n(n-1)$.

18. Se la funzione U è eguale al prodotto di due altre funzioni $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$, allora se chiamiamo $\Delta\ \Delta'$ i discriminanti di queste due funzioni, e se si rappresentano con

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3}\ \ldots\ldots,\quad \frac{x'_1}{y'_1},\ \frac{x'_2}{y'_2},\ \frac{x'_3}{y'_3}\ \ldots\ldots$$

le rispettive loro radici si avrà

$$D = \Delta\Delta' (x_1 y'_2 - x'_2 y_1)^2 (x_1 y'_3 - x'_3 y_1)^2 \ldots\ldots (x_2 y'_3 - x'_3 y_2)^2 \ldots$$

Ora il prodotto dei binomi quadrati che figurano nel secondo membro è rappresentato dal quadrato del prodotto

$$\varphi(x'_1 y'_1)\ \varphi(x'_2 y'_2)\ \varphi(x'_3 y'_3)\ \ldots$$

ovvero del prodotto

$$\psi(x_1 y_1)\ \psi(x_2 y_2)\ \psi(x_3 y_3)\ \ldots$$

Donde concludiamo: *Il discriminante del prodotto di due funzioni è eguale al prodotto dei loro discriminanti moltiplicato per il quadrato del loro eliminante.*

19. Discende facilmente da questo teorema che il discriminante di

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

è della forma $a_0 \varphi + a_1^2 \psi$ dove ψ è il discriminante della funzione

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} y + a_3 x^{n-3} y^2 + \ldots a_n y^{n-1}.$$

Questo fatto si fa manifesto se si osserva che fatto $a_0 = 0$ la funzione proposta diviene eguale al prodotto di y per la funzione di grado $n - 1$ sopraindicata. In pari modo si dimostra che lo stesso discriminante è della forma

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi.$$

20. Supponiamo ora che una funzione abbia il fattore quadrato $(xy_1 - x_1 y)^2$. Trasformo la funzione ponendo $xy_1 - x_1 y = Y$. La nuova funzione avrà $A_0 = A_1 = 0$. Ne segue che il primo evettante del discriminante sarà della forma $Y^n \frac{dI}{dA^0}$, cioè si ridurrà ad $(xy_1 - x_1 y)^n$. E questo può essere un metodo per trovare le radici eguali.

Ma il discriminante stesso ci presenta immediatamente il mezzo per trovare queste radici eguali.

Infatti se α è una doppia radice della $U = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$ la funzione $(a_0 + \lambda A_0) x^n + (a_1 + \lambda A_1) x^{n-1} + \ldots$ avrà α per radice, purchè $V = A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \ldots = 0$, ed in tal caso potremo scrivere

$$U + \lambda V = (x - \alpha)\left[\varphi(x) + \lambda \psi(x)\right].$$

Perciò il discriminante di $U + \lambda V$, sarà divisibile per $[\varphi(\alpha) + \lambda\psi(\alpha)]^2$ e siccome $\varphi(\alpha) = 0$, sarà divisibile per λ^2. Ora chiamando Δ il discriminante di U sarà il discriminante di $U + \lambda V$

$$\Delta + \lambda\left(A_0 \frac{d\Delta}{da_0} + A_1 \frac{d\Delta}{da_1} + \ldots..\right) \cdot \cdot \cdot$$

Per ipotesi $\Delta = 0$; il coefficiente di λ sarà pure eguale a zero, e perciò sarà un fattore della V. Quindi si avrà

$$\frac{d\Delta}{da_0} : \frac{d\Delta}{da_1} : \frac{d\Delta}{da_2} : \ldots. : \frac{d\Delta}{da_n} = \alpha^n : \alpha^{n-1} : \alpha^{n-2} : \ldots. : 1$$

21. La teoria dei discriminanti trova una spontanea applicazione nelle superficie sviluppabili.

Una superficie sviluppabile si può definire: l'inviluppo di un piano che ha un parametro variabile.

Ora se supponiamo

$$U = a\,t^n + n\,b\,t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} c t^{n-2} + \ldots. = 0$$

l'equazione del piano mobile, di cui t sia il parametro variabile, ed $a, b, c\ldots$ siano funzioni lineari delle coordinate x, y, z, $D = 0$ rappresenterà l'inviluppo di quel piano, ossia una superficie sviluppabile del grado $2(n-1)$. La *classe* di queste superficie sarà evidentemente n. Se a, b, c.... sono funzioni lineari di due sole coordinate, $D = 0$ rappresenterà l'inviluppo della retta U. Essa sarà una curva d'ordine $2(n-1)$, e di classe n.

III.

22. Accennate le principali proprietà comuni agl'invarianti e covarianti delle forme binarie di qualunque ordine, consideriamo in particolare gl'invarianti di quelle di 3.° e 4.° grado.

Sia la cubica

$$(1) \qquad U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Mi propongo primieramente di ridurre per mezzo di sostituzioni lineari questa funzione alla forma

$$(2) \qquad AX^3 + BY^3$$

o più semplicemente alla forma

$$u^3 + v^3$$

essendo

$$u = \lambda x + \mu y, \qquad v = \lambda_1 x + \mu_1 y.$$

A tale oggetto considero senz'altro il determinante

$$C = \begin{vmatrix} y^2 & -xy & y^2 \\ a & b & c \\ b & c & d \end{vmatrix}$$

È facile dimostrare che

$$C = h u v$$

essendo h un coefficiente numerico. Infatti moltiplicando il detto determinante per

$$\frac{1}{y^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = 1$$

si ha

$$C = \begin{vmatrix} ax + by, & bx + cy \\ bx + cy, & cx + dy \end{vmatrix}$$

Ora facendo le derivate seconde rispetto ad x, ed y di ambedue i membri dell'identità

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = u^3 + v^3$$

si ottiene

$$ax + by = \lambda^2 u + \lambda_1^2 v, \quad bx + cy = \lambda\mu u + \lambda_1 \mu_1 v, \quad cx + dy = \mu^2 u + \mu_1^2 v$$

e perciò

$$C = \begin{vmatrix} \lambda^2 u + \lambda_1^2 v, & \lambda \mu u + \lambda_1 \mu_1 v \\ \lambda \mu u + \lambda_1 \mu_1 v, & \mu^2 u + \mu_1^2 v \end{vmatrix} = h u v$$

Ora se risolviamo l'equazione $C = 0$, e troviamo i suoi fattori lineari

$$x + my, \qquad x + ny$$

avremo immediatamente

$$U = A(x + my)^3 + B(x + ny)^3$$

ed A, B saranno determinate per mezzo di semplici relazioni di primo grado.

Il determinante C detto dal Sig.r Sylvester il *Canonizante* della U non è che l'Hessiano

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 .$$

Il cui discriminante è identico al discriminante della U. Onde ricaviamo senz'al-

tro il noto teorema che un' equazione di 3° grado ha due radici immaginarie quando $D < 0$, le ha tutte reali quando $D > 0$. Quando $D = 0$, la cubica non può essere posta sotto la forma canonica. La forma più semplice della cubica in tal caso è x^2y.

Notiamo di passaggio che il metodo adoperato per ridurre la (1) alla forma (2) è valevole per la riduzione della funzione omogenea

$$a_0x^{2n-1} + (2n-1)a_1 x^{2n-2} + \frac{(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2} a_2 x^{2n-3} + \ldots a_{2n-1} y^{2n-1}$$

alla forma

$$u_1^{2n-1} + u_2^{2n-1} + u_3^{2n-1} + \ldots . u_n^{2n-1}$$

essendo u_r una funzione lineare di x ed y. In tal caso il canonizante sarebbe

$$C = \begin{vmatrix} x^n & -x^{n-1}y & x^{n-2}y^2 & \ldots \pm y^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots . \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix} = h u_1 u_2 \ldots u_n$$

La riduzione alla forma canonica di una funzione di grado $2n-1$ dipenderebbe così da un'equazione di grado n.

La cubica U messa sotto la forma (2) ci gioverà per dimostrare assai facilmente alcuni teoremi relativi agl'invarianti e i covarianti della medesima U. Infatti siccome queste funzioni mantengono colla primitiva le stesse relazioni comunque questa sia linearmente trasformata, sarà sufficiente esaminare le relazioni che passano fra la funzione posta nella sua più semplice forma e i suoi invarianti e covarianti per concluderne, che le stesse relazioni hanno luogo per una binaria qualunque dello stesso grado.

23. L'unico invariante posseduto dalla cubica U è il suo discriminante, il quale ottiensi dall'eliminazione di x e di y fra le due equazioni

$$\frac{1}{3}\frac{dU}{dx} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}\frac{dU}{dy} = bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0$$

ed è

$$\Delta = 4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2.$$

Il Sig.[r] Einsenstein a proposito di questo invariante ha trovato, che se

$$\begin{aligned} A &= \quad ad^2 - 3bcd + 2c^3 \\ B &= -acd + 2b^2d - bc^2 \\ C &= -abd + 2ac^2 - b^2c \\ D &= \quad a^2d - 3abc + 2b^3 \end{aligned}$$

si ha

$$4(AC - B^2)(BD - C^2) - (AD - BC)^2 = [4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2]^3.$$

Questo teorema enunciato dall'Einsenstein senza dimostrazione (*), può essere provato come segue.

I valori di A, B, C, D possono essere espressi così:

$$A = \frac{1}{2}\frac{d\Delta}{da}, \quad B = \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{db}, \quad C = \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dc}, \quad D = \frac{1}{2}\frac{d\Delta}{dd}$$

Si vede facilmente che se Δ' è il discriminante della funzione

$$(3) \qquad \frac{d\Delta}{da}x^3 + \frac{d\Delta}{db}x^2y + \frac{d\Delta}{dc}xy^2 + \frac{d\Delta}{dd}y^3$$

il teorema sopraenunciato è rappresentato dalla relazione

$$(4) \qquad \Delta' = 16\Delta^3.$$

Ora la (3) è l'evettante dell'invariante Δ', perciò se poniamo la U sotto la forma

$$ax^3 + dy^3$$

la (3) prenderà la forma

$$2\,ad\,(ax^3 - dy^3)$$

donde si ricava immediatamente la relazione (4).

Il Prof. Brioschi (**) ha dedotto lo stesso teorema immediatamente dal teorema più generale che « ogni invariante di un evettante è una funzione algebrica, in- » tera, razionale degl'invarianti della funzione originale », e per conseguenza essendo Δ' di 12.° grado, dovrà essere

$$\Delta' = h\Delta^3.$$

24. Il discriminante Δ rappresenta, come abbiam veduto al §. 21; l'inviluppo di una linea o di una superficie, la cui equazione è la cubica U, dove a, b, c, d siano funzioni di due o tre coordinate, ed $x : y$ rappresenti un parametro variabile. Se la superficie è un piano, il discriminante rappresenta una superficie sviluppabile.

Se adunque a, b, c, d sono funzioni lineari di tre coordinate, l'equazione

(*) *Crelle*, tomo 27, pag. 105.
(**) *Annali di scienze Matematiche e Fisiche*. Nov. 1854.

$$\Delta = 0$$

rappresenta una superficie sviluppabile di quart'ordine e di 3.ª classe che ha per linea di regresso una curva rappresentata da due dell'equazioni

(5) $$(ad - bc) = 0\,, \qquad ac - b^2 = 0\,, \qquad bd - c^2 = 0.$$

Questa curva è una cubica gobba.

Al teorema analitico dell'Einsenstein corrisponde il seguente teorema geometrico, che l'inviluppo della superficie di terzo grado

$$\frac{d\Delta}{da}t^3 + \frac{d\Delta}{db}t^2 + \frac{d\Delta}{dc}t + \frac{d\Delta}{dd} = 0$$

della quale t sia il parametro variabile è una superficie sviluppabile di quart' ordine identica a quella rappresentata da

$$\Delta = 0$$

Inoltre siccome la linea di regresso della $\Delta = 0$, è rappresentata dall'equazioni (5) si avrà

$$AD - BC = \Delta(ad - bc)\,, \quad AC - B^2 = \Delta(ac - b^2)\,, \quad BD - C^2 = \Delta(bd - c^2)$$ (*).

Un elegante teorema di Cinamica dello Chasles trova una facile dimostrazione nella proprietà di Δ di rappresentare una superficie sviluppabile del 4.º grado. « Se » tre punti si muovano uniformemente su tre rette nello spazio il piano mobile » che passa per questi tre punti inviluppa una superficie sviluppabile del quart' » ordine ». Siano infatti x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, le coordinate di quei tre punti. Esse rappresentano funzioni lineari del tempo. Siano x, y, z le coordinate correnti di un punto del piano. L'equazione di questo sarà

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sviluppando questo determinante, avremo un'equazione della forma

$$at^3 + 3bt^3 + 3ct + d$$

ove a, b, c sono funzioni lineari di x, y, z, e questo basta per la dimostrazione del suenunciato teorema.

25. Consideriamo ora la cubica in rapporto ad alcuno dei suoi covarianti,

(*) Il Cayley (Crelle, t. 34, p. 148) ha trovato che se si chiama Δ'' il determinante delle derivate parziali del 2.º ordine rispetto ad a, b, c, d di Δ si ha $\Delta'' = 3\Delta^2$. La dimostrazione del teorema, che segue, trovasi nel luogo citato.

e consideriamola nella sua forma canonica. Se con H e con J s'indicano l'Hessiano, ed il primo evettante del discriminante, si avrà

$$U = ax^3 + dy^3, \quad H = adxy, \quad J = ad(ax^3 - dy^3).$$

Donde ricaviamo

$$J^2 - \Delta U^2 = -4H^3.$$

Essendo $J^2 - \Delta U^2$ un cubo perfetto, anco i suoi fattori $J \pm U\sqrt{\Delta}$ saranno perfetti cubi. Ed infatti si ha

$$J + U\sqrt{\Delta} = 2a^2 dx^3, \qquad J - U\sqrt{\Delta} = 2ad^2y^3.$$

Ora siccome

$$xa^{\frac{1}{3}} + yd^{\frac{1}{3}}$$

è uno dei fattori di U, così il fattore corrispondente sarà proporzionale ad

$$(U\sqrt{\Delta} + J)^{\frac{1}{3}} + (U\sqrt{\Delta} - J)^{\frac{1}{3}}.$$

Questo metodo di risoluzione della binaria U è dovuto al sig. Cayley.

26. Vediamo ora quali rapporti esistano tra le radici della cubica, e quelle dei covarianti H ed I, considerati questi e quella come rappresentanti di sistemi di punti in linea retta.

Le radici $x : y$ della cubica posta sotto la forma canonica sono determinate dall'equazioni

$$(6) \qquad x + ky = 0, \qquad x + kty = 0, \qquad x + kt^2y = 0$$

ove $k = \sqrt[3]{\frac{d}{a}}$, e t, t^2 sono le due radici immaginarie dell'unità negativa.

L'Hessiano della cubica è $adxy$, e le sue radici saranno 0 e $-\infty$.

Se adunque esprimiamo con X, Y queste due radici e con α, β, γ le tre radici della cubica date rispettivamente dall'equazioni (6), si avrà

$$(X\alpha\beta\gamma) = (X\beta\gamma\alpha) = (X\gamma\alpha\beta) = t$$

ove $(X\alpha\beta\gamma)$ ecc. esprimono i tre rapporti anarmonici fondamentali del gruppo $X\alpha\beta\gamma$. In simil modo si avrebbe

$$(Y\alpha\beta\gamma) = (Y\beta\gamma\alpha) = (Y\gamma\alpha\beta) = t^2,$$

dunque (*) *i due gruppi formati colle radici di una cubica, e con ciascuna delle radici del suo Hessiano, sono equianarmonici.*

Inoltre l'*Hessiano di una forma cubica rappresenta due punti, che rispetto al gruppo rappresentato dalla cubica, hanno i centri armonici di 2.° ordine fra loro coincidenti.*

Infatti se ω_2 rappresenta un centro armonico di 2.° ordine del gruppo $\alpha\beta\gamma$ rispetto ad ω_1, si avrà (**)

(*) *Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, p. 22.
(**) *Cremona*, ivi, p. 10.

$$\frac{\omega_2-\alpha}{\omega_1-\alpha}\frac{\omega_2-\beta}{\omega_1-\beta}+\frac{\omega_2-\beta}{\omega_1-\beta}\frac{\omega_2-\gamma}{\omega_1-\gamma}+\frac{\omega_2-\gamma}{\omega_1-\gamma}\frac{\omega_2-\alpha}{\omega_1-\alpha}=0.$$

Questo è un covariante. Questo covariante, osservando ai rapporti fra i coefficienti della U e le sue radici, è rappresentato dall'equazione

$$ax_2^2 x_1 + dy_2^2 y_1 = 0.$$

Ove si è posto $x_2 : y_2$ per ω_2 ed $x_1 : y_1$ per ω_1. Affinchè questa equazione abbia due radici eguali, è necessario si abbia ad $x_1 \, y_1 = 0$; e con ciò rimane senz'altro dimostrato il teorema.

Questi due teoremi sono dovuti al Prof. Battaglini; da questi due teoremi egli ha dedotto l'altro enunciato dal Prof. Cremona: *se un sistema di quattro punti in linea retta è equianarmonico, tre qualunque di essi hanno rispetto al restante due centri armonici di secondo grado coincidenti* (*).

27. Vogliasi un punto che sia in rapporto armonico, con uno dei punti rappresentati dalla cubica rispetto agli altri due.

Sia

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2$$

il fattore della cubica, che contiene le radici corrispondenti a questi due punti. Se $xy_1 - x_1 y$ è il terzo fattore si avrà

$$Ay_1 = a, \quad 2 By_1 - A x' = 0, \quad Cy' - 2 B x_1 = 0 - Cx' = d.$$

Il punto richiesto sarà dato dall'equazione

$$(A x' + By')x + (B x' + Cy')y = 0,$$

ossia avuto riguardo alle (7) dall'equazione

$$(8) \qquad xy' + x'y = 0,$$

ed eliminando x', y', tra questa e la $ax'^3 + dy'^3 = 0$, otteniamo

$$ax^3 - dy^3 = 0.$$

Adunque *il covariante di 3° grado di una cubica, rappresenta tre punti conjugati armonici rispettivamente di ciascuno dei tre punti rappresentati dalla cubica rispetto agli altri due* (**).

28. Passiamo ora alle binarie di 4° ordine, e consideriamo la forma generale

$$(9) \qquad U = Ax^4 + 4 b x^3 y + 6 c x^2y^2 + 4 dx y^3 + e y^4.$$

La forma canonica di essa è

$$u^4 + v^4 + 6 k u^2 v^2$$

(*) *Giornale di Matematiche di Napoli*, 1863, p. 280 e 314.
(**) Battaglini, ivi, p. 314.

dove

$$u = \lambda x + \mu y\,, \qquad v = \lambda_1 x + \mu_1 y.$$

Essa non può essere ridotta alla forma $u^4 + v^4$, giacchè questa non conterrebbe che quattro costanti, mentre queste nel caso generale sono cinque.

La determinazione dei coefficienti λ, μ, λ_1, μ_1 si riporta alla determinazione del prodotto uv, il quale sarà della forma

$$\mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{B}\,xy + \mathrm{C}\,y^2\,.$$

Conosciute A, B, C, nei fattori di primo grado di questa funzione avremo

$$\lambda x + \mu y\,, \qquad \lambda_1 x + \mu_1 y\,.$$

A fine di determinare i tre coefficienti A, B, C mi gioverò del teorema del §. 10. Opero adunque col simbolo

$$\mathrm{A}\,\frac{d^2}{dy^2} + \mathrm{B}\,\frac{d^2}{dx\,dy} + \mathrm{C}\,\frac{d^2}{dx^2}$$

sopra ambi i membri dell' identità

$$a x^4 + 4 b x^3 y + 6 c x^2 y^2 + 4 d x y^3 + e y^4 = u^4 + v^4 + 6 k u^2 v^2$$

ed eguagliando i coefficienti di x^2, xy, y^2 ottengo

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}c - 2\mathrm{B}b + \mathrm{C}a &= k'\mathrm{A}\\ \mathrm{A}d - 2\mathrm{B}c + \mathrm{C}b &= k'\mathrm{B}\\ \mathrm{A}e - 2\mathrm{B}d + \mathrm{C}c &= k'\mathrm{C} \end{aligned}\right.$$

ove

$$k' = 2\,(4\,\mathrm{A}\,\mathrm{C} - \mathrm{B}^2)k\,.$$

Ora eliminando A, B, C otterrò il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c - k' \\ b & c + \frac{1}{2}k' & d \\ c - k' & d & e \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(11)\qquad k^3 - k'(ae - 4\,bd + 3c^2) - 2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) = 0.$$

I coefficienti di questa equazione sono gl' invarianti quadratico e cubico della biquadratica (Indicherò in seguito quest'invarianti rispettivamente con S e T).

Risoluta questa equazione sostituendo uno qualunque dei tre valori di k nell'equazioni (10) otterremo A, B, C.

29. La forma canonica della biquadratica U corrisponde alla forma in cui il nostro Ferrari pose per risolverla, l'equazione di 4.° grado (*). Onde l'equa-

(*) Il Ferrari infatti ridusse la biquadratica alla differenza di due quadrati. Ora da questa differenza si passa molto facilmente alla forma $u^4 + v^4 + 6k\,u^2 v^2$.

zione (11) si può considerare come la ridotta o risolvente della biquadratica. Per risolvere l'equazione di 4.° grado, vari altri metodi si sono studiati, metodi che conducono a risolventi diverse. Ora è facile dimostrare come tali risolventi non siano che trasformate a sostituzioni lineari della (11). A tale scopo richiamiamo brevemente le varie risolventi, che si adoprano per la risoluzione della biquadratica.

Sia l'equazione

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \tag{12}$$

Si ponga per maggior semplicità

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q, \quad \frac{d}{a} = r, \quad \frac{e}{a} = s$$

e siano

$$x^2 + mx + n, \qquad x^2 + m'x + n'$$

due fattori di 2.° grado primi tra loro della (12). Si avranno le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} m + m' &= 4p \\ n + n' + mm' &= 6q \\ mn' + m'n &= 4r \\ nn' &= s \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Dalle (13) si ha

$$m = \frac{4(pn - r)}{n - n'}, \qquad m' = \frac{4(pn' - r)}{n' - n}$$

donde

$$mm' = \frac{16\left[p^2 s - pr(n + n') + r^2\right]}{4s - (n + n')^2}$$

Sottraendo $6q$ da ambi i membri di questa equazione, ed osservando che $6q - mm' = n + n'$, si ha

$$(n + n')^3 - 6q(n+n')^2 + (4pr - s)(n + n') - 8(2p^2 - 3q)s - 16r^2 = 0. \tag{14}$$

Questa è la ridotta di Lagrange. Se si fa $n + n' = u$, si ha dalle (13)

$$\left.\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\} = 2p \pm \sqrt{4p^2 - (u + 6q)}, \quad \left.\begin{matrix} n \\ n' \end{matrix}\right\} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - s} \tag{15}$$

donde

$$\left(\frac{m - m'}{2}\right)^2 = (m - 2p)^2 = 4p^2 - u + 6q,$$

e fatte le sostituzioni si avrebbero equazioni di 3.° grado in $(m - m')^2$, od in $(m - 2p)^2$, che corrispondono questa alla ridotta di Cartesio, quella alla ridotta

che ottiensi per lo spezzamento della x in quattro parti. Chiamo ora $\varphi(u)$ una di queste ridotte, p. es. quella di Lagrange; avrò

$$\varphi(u+v) = \varphi(v) + \varphi'(v)\,u + \frac{1}{1.2}\varphi''(v)\,u^2 + \frac{1}{1.2.3}\varphi'''(v).$$

Ora se v soddisfa alla condizione $\varphi''(v) = 0$, si ottiene

$$\tfrac{1}{8}a^3\varphi(v) = -2T \quad , \quad \tfrac{1}{4}a^2\varphi'(v) = -S$$

e con ciò rimane dimostrato che le varie ridotte trovate della biquadratica (12) si deducono l'una dall'altra per mezzo di sostituzioni lineari. Esse avranno inoltre il discriminante comune colla biquadratica. Questa proprietà del rimanente deriva facilmente dal seguente principio, da cui Lagrange ha mostrato doversi ricavare le diverse ridotte di un'equazione. Se x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ sono le radici di un'equazione, e si ponga

$$t = \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \ldots \alpha^n x^n$$

ove α è una radice immaginaria ennesima dell'unità, i diversi valori assunti da t per tutte le possibili permutazioni di $\alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^n$ sono le radici di una ridotta dell' equazione di grado n. Ora è evidente che se due radici di questa equazione sono eguali, lo saranno altresì due della trasformata, e perciò il discriminante di questa sarà eguale o proporzionale al discriminante di quella.

30. Abbiam veduto che l'invariante cubico si ottiene ponendo $2q$ in luogo di u nella ridotta di Lagrange, e moltiplicando per una quantità costante; adunque $T = 0$ esprime la condizione

$$n + n' = 2q = \tfrac{1}{2}mm'$$

a cui debbono soddisfare le radici x_1, x_2, x_3, x_4, ossia

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = \tfrac{1}{2}(x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4).$$

Questa relazione esprime che le radici x_1, x_2, x_3, x_4, sono in rapporto armonico.

Siano α, β, γ le radici di una qualunque delle ridotte dell'equazione di 4.° grado, e si ponga

$$\alpha_1 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}, \quad \beta_2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$$

Si avrà

$$\alpha_1\alpha_2 = 1 \ , \quad \beta_1\beta_2 = 1 \ , \quad \gamma_1\gamma_2 = 1$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1 \ , \quad \beta_1 + \gamma_2 = 1 \ , \quad \gamma_1 + \alpha_2 = 1 \ .$$

Da queste relazioni si deduce, che α_1, β_1, γ_1 rappresentano tre rapporti anar-

monici fondamentali. I punti a cui questi rapporti anarmonici si riferiscono sono i quattro rappresentati dall'equazione di 4.° grado. Ora se α, β, γ sono le radici della (11), e si pone $S=0$, si avrà

$$\alpha=\mu t, \qquad \beta=\mu t^2, \qquad \gamma=\mu$$

dove t t^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità, e $\mu=\sqrt[3]{2T}$; quindi

$$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=-t^2 .$$

Donde ricaviamo il teorema; *un'equazione di quarto grado, il cui quadrinvariante sia nullo, ha le quattro radici in rapporto equianarmonico.*

Se si pone $T=0$, si ha

$$\alpha_1=2, \qquad \beta_1=-1, \qquad \gamma_1=\tfrac{1}{2}$$

ciò ch' esprime il teorema già dimostrato, cioè *se l' invariante cubico di una equazione di quarto grado è nullo, due delle sue radici sono conjugate armoniche delle altre due.*

31. Le forme sotto cui si presentano le radici di un' equazione di quarto grado, adottando l'una o l'altra delle accennate risolventi, sono notissime. Non credo però superfluo riportare l'elegantissima forma data dal Cayley al fattore di primo grado della biquadratica U.

Sia adunque

$$U=x^4+y^4+6q\,x^2y^2 .$$

Il suo Hessiano sarà

$$H=q(x^4+y^4)+(1-3q^2)x^2y^2$$

ove q è determinato dalla (11) ovvero dall'altra

$$(16) \qquad 4z^3-Sz+T=0 .$$

Notiamo che siccome

$$S=1+3q^2, \qquad T=q-q^3$$

le tre radici dell'equazione in z saranno

$$z_1=q, \qquad z_2=-\frac{q+1}{2}, \qquad z_3=-\frac{q-1}{2} .$$

Ciò premesso, risolviamo col metodo di Ferrari la U; il suo fattore lineare sarà proporzionale ad

$$x\left[\left(\frac{3q+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mp\left(\frac{3q-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=y\left[\left(\frac{3q+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\pm\left(\frac{3q-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Innalzando questo fattore al quadrato ho

$$\pm 2\, xy + \left(\frac{3q+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2) \pm \left(\frac{3q-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x^2-y^2)$$

ovvero

$$2\, xy(z_3 - z_2)^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)(z_2 - z_1)^{\frac{1}{2}} + (x^2-y^2)(z_3 - z_1)^{\frac{1}{2}}$$

rendendo implicito in ogni radice il doppio segno.

Moltiplicando ora per

$$(z_2 - z_3)^{\frac{1}{2}}(z_3 - z_1)^{\frac{1}{2}}(z_1 - z_2)^{\frac{1}{2}},$$

ed osservando alle espressioni di U e di H si ottiene

$$(z_2 - z_3)(H - z_1 U)^{\frac{1}{2}} + (z_3 - z_1)(H - z_2 U)^{\frac{1}{2}} + (z_1 - z_2)(H - z_3 U)^{\frac{1}{2}}.$$

Adunque la radice di questa espressione sarà proporzionale al fattore lineare della biquadratica U.

32. Sia l'equazione

$$(x^2 + mx + n) + \omega(x^2 + m' x + n') = 0$$

dove ω è una quantità variabile, ed i trinomi tra parentesi sono i due fattori di 2.° grado considerati nel §. 29. La suddetta equazione rappresenta un' involuzione di 2.° grado, di cui fan parte le coppie di punti determinate dai detti fattori. I punti doppi di questa involuzione saranno determinati dall'equazione

$$(17) \qquad x(1+\omega) + \left(\frac{m+\omega m'}{2}\right) = 0$$

dove ω soddisfa alla relazione

$$(18) \qquad 4(1+\omega)(n+\omega n') - (m+\omega m')^2 = 0.$$

Se ora eliminiamo ω, m, m', n, n' in virtù delle (15) e (14) la risultante in x rappresenterà i punti doppi delle tre involuzioni determinate dalla biquadratica. Questa eliminazione riesce assai facile se noi consideriamo la biquadratica nella sua forma canonica.

L'equazioni (15) divengono in questo caso

$$m = \sqrt{-(u+6q)}\,,\ m' = -\sqrt{-(u+6q)}\,,\ n = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}\,,\ n' = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - 1}$$

e la (14)

$$\left(\frac{u}{2}+1\right)\left(\frac{u}{2}-1\right)(u+6q) = 0.$$

Ora sostituendo i valori di m, m', n, n' nelle (17) e (18) si ottiene

$$x(1+\omega) + \tfrac{1}{2}(1-\omega)\sqrt{-(u+6q)} = 0$$

$$2\,u(1+\omega)^2 + 4(1-\omega^2)\sqrt{\frac{u^2}{4} - 1} + (1-\omega)^2(u+6q) = 0$$

e tra queste eliminando $\frac{1-\omega}{1+\omega}$, si otterrà

$$\left(x^2-\frac{u}{2}\right)\sqrt{-(u+6q)}-2x\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}=0.$$

In questa espressione facciamo successivamente

$$\frac{u}{2}+1=0,\quad \frac{u}{2}-1=0,\quad u+6q=0.$$

Si avrà

$$x^2-1=0,\qquad x^2+1=0,\qquad x=0,\qquad x=\infty$$

e perciò sostituendo $x:y$ in luogo di x, la risultante cercata sarà

$$xy(x^4-y^4)=0$$

Questa espressione è proporzionale al covariante $\overline{12}^2.\overline{13}$ di U, il quale è

$$J=(1-9q^2)\,xy\,(x^4-y^4)$$

Adunque J rappresenta i sei punti doppi delle tre involuzioni determinate dalle radici della biquadratica U.

Osservando i valori di H e di V si trova J^2 proporzionale ad

$$(H-z_1U)(H-z_2U)(H-z_3U)$$

ovvero (ponendo mente alla (16)) proporzionale a

$$4H^3-SHU^2+TU^3$$

33. Terminerò coll'osservare che il discriminante della biquadratica U è dipendente dagl'invarianti quadratico e cubico per la relazione

$$D=S^3-27T^2$$

e che se $D=0$ rappresenta una superficie sviluppabile (ciocchè avviene quando i coefficienti della biquadratica rappresentano dei piani), la sua linea di regresso è espressa dalle due equazioni

$$S=0,\qquad T=0\quad (*).$$

Pavia, Ottobre 1863.

(*) *Cayley*, *Sur les Hyperdéterminants*. *Crelle*, tomo 34, p. 147.



SULLA FLESSIONE DELLE SUPERFICIE RIGATE

MEMORIA

DEL PROF. E. BELTRAMI



§. 1.°

Rappresentiamo con ξ, η, ζ le coordinate ortogonali di una linea qualsivoglia tracciata sopra una superficie rigata, che riguarderemo come *direttrice* di questa superficie e che assoggetteremo alla sola condizione di non confondersi con una delle generatrici rettilinee; con l, m, n i coseni degli angoli che la generatrice passante per il punto (ξ, η, ζ) fa coi tre assi, e con v la lunghezza della porzione di generatrice compresa fra il punto anzidetto ed un altro punto qualunque della generatrice stessa. La superficie potrà rappresentarsi colle equazioni

1. $x = \xi + vl\,, \qquad y = \eta + vm\,, \qquad z = \zeta + vn\,,$

in cui le l, m, n sono legate dalla solita relazione

2. $l^2 + m^2 + n^2 = 1.$

Noi supporremo tanto le l, m, n, quanto le ξ, η, ζ funzioni dell'arco u della direttrice, epperò avremo parimente la relazione

3. $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1\,,$

in cui gli accenti indicano derivate prese relativamente ad u.

Poniamo per brevità

4. $\begin{cases} l'\xi' + m'\eta' + n'\zeta' = \varkappa\,, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = \varepsilon^2\,, \end{cases}$

e rappresentiamo con θ l'angolo formato dalla generatrice colla direttrice, cioè poniamo

5. $l\xi' + m\eta' + n\zeta' = \cos\theta.$

Quest' angolo, come gli altri che si presenteranno in seguito, sarà misurato nel senso in cui si procede dalla direzione positiva della direttrice (cioè da quella secondo cui cresce u) alla direzione positiva della generatrice (cioè a quella secondo cui cresce v).

Riguardando le u, v come coordinate curvilinee ed adottando le note segnature di GAUSS, si trova:

$$6. \qquad E = 1 + 2\varkappa v + \varepsilon^2 v^2, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1.$$

Supponendo ora che la superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, venga a cambiare di forma, in modo però che le sue generatrici rettilinee si conservino tali, è chiaro che la direttrice si trasformerà in una certa altra curva, di cui indicheremo con ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate, nel punto corrispondente al punto (ξ, η, ζ), mentre le l, m, n si muteranno in l_1, m_1, n_1. Le variabili u, v avranno lo stesso valore nei punti corrispondenti delle due superficie, epperò affinchè l' elemento lineare sia, come dev' essere, identico per le due superficie, ossia affinchè le E,F,G sieno le medesime per l' una superficie e per l' altra, è evidentemente necessario e sufficiente che sussistano le tre equazioni:

$$7. \qquad \begin{cases} l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon^2, \\ l_1\xi_1' + m_1\eta_1' + n_1\zeta_1' = \cos\theta, \\ l_1'\xi_1' + m_1'\eta_1' + n_1'\zeta_1' = \varkappa, \end{cases}$$

alle quali debbonsi aggiungere le due seguenti

$$8. \qquad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \qquad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1.$$

Notiamo che per essere

$$(l\xi' + m\eta' + n\zeta')' = \varkappa + l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'',$$

si ha

$$9. \qquad l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'' = -(\varkappa + \theta' \operatorname{sen}\theta).$$

Ora chiamando ρ il raggio di curvatura della direttrice primitiva nel punto (u) ed ω l' angolo che questo raggio fa col piano tangente della superficie, si ha

$$10. \qquad l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'' = \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho}:$$

quindi

$$11. \qquad \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho} = -(\varkappa + \theta' \operatorname{sen}\theta).$$

Dunque all' ultima delle equazioni (7) si può, in virtù di quella che la precede, sostituire la seguente

12. $$\frac{\cos\omega_1}{\rho}=\frac{\cos\omega}{\rho},$$

la quale esprime che le curvature geodetiche delle due direttrici sono le stesse nei punti corrispondenti. Questo risultato poteva essere stabilito *a priori*, come conseguenza della nota proprietà fondamentale di queste curvature: ma il processo tenuto ci insegna, ciò che è assai importante pel nostro scopo, che le tre proprietà espresse dalle due prime equazioni (7) e dalla (12), come sono condizioni evidentemente *necessarie* per l' identità degli elementi lineari delle due superficie, così sono anche *sufficienti* a determinare questa identità.

Chiamando ∂w la minima distanza delle due generatrici infinitamente vicine corrispondenti ai valori u ed $u+\partial u$, si ha

13. $$\partial w=\frac{\sqrt{\varepsilon'^2\,\text{sen}^2\theta-\varkappa^2}}{\varepsilon'}\partial u,\qquad \varepsilon'^2\,\text{sen}^2\theta-\varkappa^2=\begin{vmatrix} l & m & n\\ l' & m' & n'\\ \xi' & \eta' & \zeta'\end{vmatrix}^2,$$

per cui la quantità sempre reale $\sqrt{\varepsilon'^2\,\text{sen}^2\theta-\varkappa^2}$ non può essere nulla che quando la superficie è sviluppabile. Questa formola non sussiste, o, per meglio dire, diventa indeterminata per le superficie cilindriche, nelle quali si ha al tempo stesso $\varepsilon'=\varkappa=0$: in questo caso particolarissimo si ha evidentemente

13'. $$\partial w=\partial u\ \text{sen}\,\theta.$$

Le funzioni $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, l_1, m_1, n_1$, che determinano la superficie trasformata, debbono soddisfare a cinque equazioni, equivalenti alle (7.), (8.). Quindi è chiaro che una di esse deve potersi scegliere ad arbitrio, ovvero che le espressioni generali delle anzidette sei quantità debbono involgere una funzione arbitraria. Cosifatte espressioni generali sono state assegnate dal sig. Minding (*), che pel primo si è occupato di questo argomento, e dagli altri autori che hanno seguito le sue traccie (**). Ma se coll' introduzione esplicita di una funzione arbitraria può dirsi che il problema sia risoluto analiticamente in tutta la sua generalità, non è lo stesso quando si abbia di mira la quistione geometrica. È chiaro infatti che, per determinare completamente la natura della superficie trasformata, si può prescrivere una nuova condizione, esprimibile per mezzo di un' equazione finita o differenziale fra le

(*) Giornale di Crelle, t. XVIII.
(**) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahiers XXXII et XXXIX.

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, l_1, m_1, n_1, u, v$. Volendo determinare la funzione arbitraria del sig. MINDING per mezzo di questa equazione, si incontrerebbero il più delle volte difficoltà analitiche assai più gravi di quelle che si devono superare trattando direttamente le sei equazioni fra le quantità anzidette.

Noi ci proponiamo di mostrare l' applicazione di questo secondo metodo ad alcuni casi scelti fra i più interessanti, colla speranza che la semplicità dei calcoli e dei risultati possa invogliare altri a proseguire in queste ricerche, le quali sembrano promettere una messe abbondante di nuovi ed eleganti teoremi.

§. 2.°

Se, ritenute soddisfatte le prime due condizioni (7.), si suppone che la curvatura geodetica della primitiva direttrice sia nulla, risulta manifestamente dalla (12) essere necessario e sufficiente che sia nulla la curvatura geodetica della direttrice trasformata: vale a dire che, se la direttrice della 1.ª superficie è una linea geodetica, è necessario e sufficiente che sia geodetica anche quella della seconda, posto che sieno soddisfatte le altre due condizioni. Ciò premesso vediamo se la direttrice trasformata possa essere una retta. Assumendo questa retta per asse delle z e contando le sue lunghezze u dall' origine, si avrebbe

$$\xi_1 = 0\,, \quad \eta_1 = 0\,, \quad \zeta_1 = u\,, \quad \frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = 0.$$

Per soddisfare alla seconda delle condizioni (7.) basta evidentemente supporre $= \theta$ l' angolo che la generatrice della superficie trasformata fa coll' asse delle z: noi porremo dunque

$$14. \qquad l_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \quad m_1 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,, \quad n_1 = \cos\theta$$

da cui

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta\,,$$

e le due rimanenti condizioni si ridurranno così alle seguenti:

$$\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta = \varepsilon^2, \qquad \frac{\cos\omega}{\rho} = 0.$$

Se dunque si ammette che la direttrice primitiva sia una linea geodetica della superficie data, la seconda di queste equazioni sarà identicamente soddisfatta, e la prima lo sarà egualmente determinando φ colla formola

$$15. \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta}\, du\,,$$

dopo di che le (14.) daranno i valori di l_1, m_1, n_1. Dunque:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata, per via di semplice flessione, in modo che una sua linea geodetica diventi una linea retta; e questa trasformazione dipende da una sola quadratura.

Consideriamo per esempio l'iperboloide di rotazione

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

per il quale, assumendo come linea direttrice la circonferenza di gola, che è una sua linea geodetica, si può porre

$$\xi = a\cos\frac{u}{a}, \qquad \eta = a\,\mathrm{sen}\frac{u}{a}, \qquad \zeta = 0,$$

$$l = -\cos\theta\,\mathrm{sen}\frac{u}{a}, \qquad m = \cos\theta\cos\frac{u}{a}, \qquad n = \mathrm{sen}\,\theta, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a}.$$

La formola (15) dà in questo caso

$$\varphi = \frac{u\,\mathrm{cotg}\,\theta}{a} = \frac{u}{b}$$

e quindi

$$l_1 = \mathrm{sen}\,\theta\cos\frac{u}{b}, \qquad m_1 = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\frac{u}{b}, \qquad n_1 = \cos\theta.$$

Le coordinate della superficie trasformata, che è un elicoide a direttrice rettilinea, sono dunque

$$x = \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{u}{b}, \qquad y = \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\frac{u}{b}, \qquad z = u + \frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

da cui eliminando u, v si deduce.

$$z = \frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2} + b\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{y}{x},$$

equazione di una superficie applicabile sull'iperboloide di rotazione i cui semiassi sono a e b.

È bene osservare che quando la direttrice è una linea geodetica, si ha dalla (11.) $x = -\theta'\,\mathrm{sen}\,\theta$, e quindi (13.)

$$\partial w = \frac{\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\varepsilon'^2-\theta'^2}}{\varepsilon'}\,\partial u.$$

Ne risulta (15.) che se la superficie primitiva è sviluppabile si ha $\varphi =$ cost. e quindi la superficie trasformata è un piano. Questo fatto è una conseguenza necessaria dell' ipotesi da noi ammessa che nella trasformazione le generatrici si mantengano rettilinee.

Sono degne d' essere notate le seguenti due applicazioni del teorema generale dimostrato al principio di questo §.

1°) Ogni superficie gobba sulla quale esiste una linea geodetica normale a tutte le generatrici si può, come è manifesto, considerare come generata dalle rette perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura. Ora quando questa linea geodetica viene trasformata in una linea retta, le generatrici della superficie si dispongono tutte normalmente a questa retta. Si può dunque dire che:

Ogni superficie gobba generata dalle perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura è applicabile sopra una superficie conoidale (*).

Le formole relative a questa trasformazione sono semplicissime. Infatti se l, m, n sono i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla normale al piano osculatore di una linea a doppia curvatura di cui u è l' arco, r il raggio di torsione, si ha

$$\varepsilon' = \frac{1}{r}$$

e quindi

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = u, \qquad \varphi = \int \frac{du}{r},$$

$$l_1 = \cos\varphi, \quad m_1 = \operatorname{sen}\varphi, \quad n_1 = 0.$$

2°) In virtù del teorema generale dimostrato in questo §. si vede che il numero delle superficie rigate *rettificanti* di una linea qualsivoglia, piana od a doppia curvatura, è *illimitato*. È chiaro infatti che se da ogni punto di questa linea si conduce una retta perpendicolare alla normale principale ed inclinata sulla tangente di un angolo variabile con legge qualunque, si genera una superficie rigata della quale la linea data è linea geodetica: si può dunque sempre trasformare questa superficie in modo che la linea si converta in una retta.

Chiamiamo a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla tangente, dalla normale principale e dalla perpendicolare al piano osculatore della linea data, con ρ, r i raggi di 1ª e 2ª curvatura. Indicando con l, m, n i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla generatrice di una delle superficie rigate rettificanti, si può porre

$$l = a_1 \cos\theta + a_3 \operatorname{sen}\theta, \quad m = b_1 \cos\theta + b_3 \operatorname{sen}\theta, \quad n = c_1 \cos\theta + c_3 \operatorname{sen}\theta,$$

(*) [illegible], *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 9 Jahrg., p. [illegible].

da cui, per le note formole del sig SERRET (*), si deduce

$$l' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)a_2 - \theta'(a_1 \operatorname{sen}\theta - a_3\cos\theta)\,,$$

$$m' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)b_2 - \theta'(b_1 \operatorname{sen}\theta - b_3\cos\theta)\,,$$

$$n' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)c_2 - \theta'(c_1 \operatorname{sen}\theta - c_3\cos\theta)\,,$$

e quindi

16. $$\epsilon^2 = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)^2 + \theta'^2.$$

Per questo valore la (15) diventa:

$$\varphi = \int_1 du\left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\rho} + \frac{1}{r}\right)$$

Quando si determina θ coll'equazione

$$\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\rho} + \frac{1}{r} = 0,$$

la superficie trasformata è un piano, e si ottiene così la *sviluppabile rettificante*, che è la sola superficie rettificante alla quale i geometri abbiano fin qui rivolta la loro attenzione. Infatti il noto valore di θ relativo alle generatrici di questa superficie coincide col precedente.

L'equazione (16.) rientra in una formola più generale che verrà stabilita altrove.

§. 3.°

Il teorema dimostrato nel § precedente può rendersi intuitivo col mezzo di considerazioni geometriche semplicissime, le quali conducono altresì alla conoscenza di una proprietà più generale.

Infatti ogni superficie rigata si può considerare come formata da infinite striscie, ciascuna compresa fra due generatrici rettilinee contigue. Si immagini una linea qualunque tracciata su questa superficie. Il piano tangente alla superficie in un punto di questa linea è determinato dalla direzione della generatrice passante per quel punto, e dalla direzione dell'elemento di curva terminato al punto stesso. Ora è

(*) Veggasi BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, §§. 590, 591.

chiaro che si può far girare la striscia contenente il successivo elemento intorno alla generatrice contenente il punto comune a questo ed al primo elemento, finchè l'altro termine del secondo elemento, e quindi tutto l'elemento stesso, venga a giacere nel piano tangente che contiene il primo elemento. Nello stesso modo si può far girare la terza striscia finchè l'elemento in essa contenuto si disponga nel piano determinato dall'elemento precedente e dalla generatrice comune alla seconda ed alla terza striscia; e così di seguito. In tal guisa la primitiva superficie rigata viene a trasformarsi in un'altra sulla quale la curva trasformata si trova tracciata in modo che ciascuna coppia di elementi consecutivi esiste nel piano tangente la superficie stessa. Vale a dire la curva trasformata ha tutti i suoi piani osculatori tangenti la superficie trasformata, e però è una linea *assintotica* di questa superficie. Dunque:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una linea qualunque tracciata sovr' essa diventi una linea assintotica della superficie trasformata.

Quando la linea primitiva è geodetica, comunque si infletta la superficie sulla quale è tracciata, essa deve sempre continuare ad essere una geodetica della superficie trasformata, e quindi i suoi piani osculatori debbono sempre mantenersi normali alla superficie stessa. Essa dunque non può diventare una linea assintotica senza trasformarsi in una retta, giacchè in ogni altro caso è impossibile che i suoi piani osculatori sieno al tempo stesso normali e tangenti alla superficie trasformata. Così si ricade sul teorema del §. precedente.

Se la linea che si considera è una trajettoria ortogonale delle generatrici, è chiaro che quando essa è stata trasformata in linea assintotica, le sue normali principali sono dirette secondo le generatrici della superficie trasformata. Di qui si conclude che *si può sempre, con una flessione opportuna, rendere tutte le generatrici di una superficie rigata normali principali di una qualunque delle loro trajettorie ortogonali* (*).

È facile trovare le formole relative alla trasformazione in discorso.

Infatti la (12.) dà primieramente

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{\cos\omega}{\rho},$$

poichè $\omega_1=0$ per le linee assintotiche. Di qui è confermata l'osservazione che se la prima direttrice è geodetica, la trasformata è una retta. L'equazione precedente può scriversi, in virtù della (11.),

$$17. \qquad \rho_1=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{x+\theta'\operatorname{sen}\theta}.$$

(*) Bour, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier XXXIX, p. 52.

Quando la curva che si considera è la linea di stringimento, si ha $\varkappa = 0$, epperò

$$\rho_1 = -\frac{1}{\theta'} = -\frac{du}{d\theta},$$

ovvero, chiamando $d\eta$ l'angolo di contingenza della linea trasformata,

$$d\eta + d\theta = 0,$$

formola da cui si deduce un teorema noto (*).

Chiamiamo ora $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla tangente, dalla normale principale e dalla perpendicolare al piano osculatore della direttrice trasformata. Osservando che la generatrice della superficie trasformata è nel piano osculatore di questa curva e fa l'angolo θ colla tangente ad essa, si vede essere:

18. $l_1 = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta$, $m_1 = \beta_1 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta$, $n_1 = \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta$

da cui, ricordando le già citate relazioni del Sig. Serret, si deduce

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \theta'\right)^2,$$

dove r_1 è il raggio di torsione della curva trasformata. Di qui si cava (7., 17.)

$$19. \qquad r_1 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}.$$

Le due equazioni (17.) (19.), insieme colla (3.), definiscono completamente le tre funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, conosciute le quali le l_1, m_1, n_1 sono date dalle (18.).

Il valore di r_1 non diventa infinito che per $\sqrt{\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0$, cioè la curva trasformata non può essere piana che quando la superficie primitiva è sviluppabile, lo che è anche chiaro per sè. Bisogna però eccettuare il caso in cui la direttrice coincide collo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, giacchè allora si ha $\theta = 0$, $\varkappa = 0$ e la formola precedente diventa indeterminata, come dev'essere: infatti comunque si pieghi una superficie sviluppabile, purchè le sue primitive generatrici si mantengano rettilinee, è chiaro che il suo spigolo di regresso conserva sempre la proprietà caratteristica delle linee assintotiche, e, mentre la sua curvatura di prima specie si mantiene invariata in ciascun punto, la torsione può ricevere valori variabili con legge arbitraria.

(*) Paul Serret, *Théorie nouvelle des lignes à double courbure*, p. 150.

Quando la direttrice coincide colla linea di stringimento della superficie (supposta non sviluppabile), si ha dalla (19.) la formola semplicissima

$$r_1 = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\varepsilon'},$$

che per $\theta = 90°$ coincide con una che abbiamo già incontrata nella penultima applicazione del §. 2°.

La direttrice trasformata risulta definita, nella presente trasformazione, dalle espressioni dei due raggi di 1ª e 2ª curvatura in funzione dell'arco: il problema di determinare una curva con queste condizioni è stato recentemente trattato dal sig. HOPPE (*). Del resto è chiaro che l'integrazione completa delle tre equazioni (17.) (19.) (3.), che sono del 2°, 3° e 1° ordine, deve introdurre sei costanti arbitrarie, che si possono determinare fissando la posizione assoluta della nuova direttrice nello spazio. Tutte le superficie trasformate in questo modo non possono dunque differire fra loro che per la posizione, come emerge anche dalle precedenti considerazioni geometriche.

§. 4°

Ponendo per brevità

$$A = mn' - m'n, \qquad B = nl' - n'l, \qquad C = lm' - l'm,$$

dalle tre equazioni

$$l\xi' + m\eta' + n\zeta' = \cos\theta,$$

$$l'\xi' + m'\eta' + n'\zeta' = \varkappa,$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$

si deducono i valori seguenti:

$$20. \quad \left\{ \begin{aligned} \xi' &= l\cos\theta + \frac{\varkappa l' \pm A\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \\ \eta' &= m\cos\theta + \frac{\varkappa m' \pm B\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \\ \zeta' &= n\cos\theta + \frac{\varkappa n' \pm C\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \end{aligned} \right.$$

formole nelle quali il radicale deve esser preso collo stesso segno in tutte tre.

(*) Giornale di CRELLE-BORCHARDT, t. LX, LXIII.

Se escludiamo il caso delle superficie sviluppabili, i due sistemi di valori delle ξ', η', ζ' sono sempre essenzialmente differenti, poichè la quantità $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}$ non può esser nulla indipendentemente da u. Quindi è chiaro che uno solo di questi sistemi coinciderà con quello dei valori già precedentemente noti delle derivate ξ', η', ζ': in altri termini, affinchè la sostituzione dei valori dati di $\xi, \eta, \zeta, l, m, n$ renda identiche le tre formole precedenti, bisognerà dare al radicale un segno determinato.

Ciò posto osserviamo che se si ponesse

$$21. \qquad l_1 = l\,, \qquad m_1 = m\,, \qquad n_1 = n\,,$$

le cinque equazioni (7.) (8.) si ridurrebbero alle sole tre seguenti:

$$l\,\xi'_1 + m\,\eta'_1 + n\,\zeta'_1 = \cos\theta\,,$$

$$l'\xi'_1 + m'\eta'_1 + n'\zeta'_1 = \varkappa\,,$$

$$\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1 = 1\,,$$

le quali non differiscono che per la sostituzione di $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ a ξ', η', ζ' da quelle che ci hanno forniti i valori (20) e che devono dare quindi per le prime tre quantità valori identici ai suddetti. Se dunque si prende in queste formole il radicale col segno opposto a quello che rende i loro secondi membri identicamente eguali a ξ', η', ζ' si hanno i valori di $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$, corrispondenti ad una superficie gobba distinta dalla data, il cui elemento lineare è identico a quello della prima e le cui generatrici sono parallele alle corrispondenti generatrici della stessa. Dunque:

È sempre possibile trasformare una superficie gobba in modo che ciascuna generatrice della trasformata sia parallela alla corrispondente generatrice della primitiva.

Facciamo alcune applicazioni di questo teorema:

1°) Consideriamo dapprima una superficie dotata di una direttrice rettilinea e poniamo:

$$\xi = 0\,, \qquad \eta = 0\,, \qquad \zeta = u\,,$$

$$l = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \qquad m = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,, \qquad n = \cos\theta\,,$$

donde

$$\varepsilon' = \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,, \qquad \varkappa = -\theta'\operatorname{sen}\theta\,, \qquad \sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = \varphi'\operatorname{sen}^2\theta\cdot$$

Sostituendo questi valori nelle formole (20) e prendendo il segno conveniente si

trova:

$$\xi'_1 = \frac{\varphi' \operatorname{sen}^2\theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta} (\varphi' \operatorname{sen} 2\theta \cos\varphi + 2\theta' \operatorname{sen}\varphi),$$

$$\eta'_1 = \frac{\varphi' \operatorname{sen}^2\theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta} (\varphi' \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\varphi - 2\theta' \cos\varphi),$$

$$\zeta'_1 = \frac{\theta'^2 + \varphi'^2 \cos 2\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta},$$

le quali formole, quando θ è costante, si risolvono nelle semplicissime:

$$\xi_1 = \operatorname{sen} 2\theta \int du \cos\varphi, \qquad \eta_1 = \operatorname{sen} 2\theta \int du \operatorname{sen}\varphi, \qquad \zeta_1 = u \cos 2\theta.$$

2°) Supponiamo che la superficie primitiva sia costituita dalle normali principali di una linea a doppia curvatura, e quindi poniamo:

$$l = a_2, \qquad m = b_2, \qquad n = c_2,$$

da cui si deduce

$$l' = -\left(\frac{a_1}{\rho} + \frac{a_3}{r}\right), \qquad m' = -\left(\frac{b_1}{\rho} + \frac{b_3}{r}\right), \qquad n' = -\left(\frac{c_1}{\rho} + \frac{c_3}{r}\right).$$

Si troverà

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \epsilon^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}, \qquad x = -\frac{1}{\rho}, \qquad \sqrt{\epsilon^2 - x^2} = \frac{1}{r},$$

$$A = \frac{a_3}{\rho} - \frac{a_1}{r}, \qquad B = \frac{b_3}{\rho} - \frac{b_1}{r}, \qquad C = \frac{c_3}{\rho} - \frac{c_1}{r}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole (20), prendendo i segni opportuni, e ponendo

$$\frac{\rho}{r} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta,$$

si trovano le formole seguenti:

$$\xi'_1 = a_1 \cos\Theta + a_3 \operatorname{sen}\Theta, \qquad \eta'_1 = b_1 \cos\Theta + b_3 \operatorname{sen}\Theta,$$

$$\zeta'_1 = c_1 \cos\Theta + c_3 \operatorname{sen}\Theta,$$

dalle quali, nei casi particolari, si deducono coll'integrazione le coordinate della direttrice trasformata

Da esse si ricava la relazione

$$\xi'_1 a_1 + \eta'_1 b_1 + \zeta'_1 c_1 = \cos\Theta,$$

la quale ci insegna che l'angolo delle tangenti alle due direttrici nei punti corrispondenti è $= \Theta$.

Derivando le stesse formole si trova:

$$\xi''_1 = \frac{a_2}{\rho} + (a_3 \cos\Theta - a_1 \operatorname{sen}\Theta)\Theta',$$

$$\eta''_1 = \frac{b_2}{\rho} + (b_3 \cos\Theta - b_1 \operatorname{sen}\Theta)\Theta',$$

$$\zeta''_1 = \frac{c_2}{\rho} + (c_3 \cos\Theta - c_1 \operatorname{sen}\Theta)\Theta',$$

da cui si trae:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho^2} + \Theta'^2;$$

inoltre

$$\xi''_1 a_2 + \eta''_1 b_2 + \zeta''_1 c_2 = \frac{1}{\rho},$$

e quindi, chiamando ψ l'angolo che la normale principale della direttrice trasformata fa con quella della primitiva,

$$\cos\psi = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\Theta'^2}}$$

Affinchè le normali principali delle due curve fossero parallele (e quindi anche le normali principali della trasformata coincidessero colle generatrici della seconda superficie) bisognerebbe che si avesse $\cos\psi = 1$, e quindi $\rho_1 = \rho$, $\Theta = \text{cost.}$, $\frac{\rho}{r} = \text{cost.}$ Quest'ultima equazione non appartiene, come è noto, che alle eliche cilindriche. Si riconosce agevolmente che in questo caso particolare la direttrice trasformata è un' elica tracciata sul medesimo cilindro, eguale e simmetrica alla prima rispetto ad un piano normale alle generatrici del cilindro stesso. Due punti corrispondenti si trovano sulla medesima generatrice.

3°) La superficie abbia la linea di stringimento ortogonale alle generatrici, cioè sia costituita dalle perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura. In questo caso si ha

$$\cos\theta = 0, \quad \varkappa = 0; \quad l = a_3, \quad m = b_3, \quad n = c_3,$$

da cui

$$\varepsilon' = \frac{1}{r}, \qquad A = -\frac{a_1}{r}, \qquad B = -\frac{b_1}{r}, \qquad C = -\frac{c_1}{r},$$

e quindi

$$\xi'_1 = -a_1, \quad \eta'_1 = -b_1, \quad \zeta'_1 = -c_1,$$

Integrando si ottiene

$$\xi_1 = x_0 - \xi, \qquad \eta_1 = y_0 - \eta, \qquad \zeta_1 = z_0 - \zeta,$$

donde si vede che la direttrice trasformata è semplicemente simmetrica della primitiva rispetto al punto che ha per coordinate $\frac{1}{2}x_0$, $\frac{1}{2}y_0$, $\frac{1}{2}z_0$, vale a dire che questo punto (arbitrario) divide per metà tutte le rette che congiungono due punti corrispondenti delle due direttrici.

Troveremo nel §. 6° un'altro esempio di parallelismo delle generatrici corrispondenti in due superficie trasformata l'una dall'altra.

§. 5°

Considereremo ora il caso che la direttrice debba trasformarsi in una curva piana. Assumendo il piano della curva trasformata per piano delle xy si avrà $\zeta_1 = 0$, e le equazioni della trasformazione saranno le seguenti:

$$22. \quad \begin{cases} l_1\xi'_1 + m_1\eta'_1 = \cos\theta, \quad l'_1\xi'_1 + m'_1\eta'_1 = \varkappa, \quad \xi'^2_1 + \eta'^2_1 = 1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1 = \varepsilon'^2, \end{cases}$$

il cui numero è eguale a quello delle funzioni da determinare.

Incominciamo coll'escludere il caso in cui si abbia simultaneamente:

$$\cos\theta = 0, \qquad \varkappa = 0,$$

cioè in cui la linea di stringimento sia una trajettoria ortogonale delle generatrici, caso già considerato più volte. In questa ipotesi le prime due equazioni (22.) si possono scrivere:

$$l_1\xi_1' + m_1\eta'_1 = 0, \qquad l_1\xi''_1 + m_1\eta''_1 = 0,$$

e per soddisfarle bisogna supporre

$$l_1 = m_1 = 0, \qquad n_1 = 1,$$

ovvero

$$\xi'_1\eta''_1 - \xi''_1\eta'_1 = 0.$$

La prima soluzione non è ammissibile che quando $\varepsilon' = 0$, il chè richiede che la superficie data sia cilindrica: in questo caso la trasformazione resta indeterminata,

come è evidente anche *a priori*. Nel secondo caso si avrebbe $\frac{1}{\rho_1} = 0$ e quindi la direttrice trasformata sarebbe una linea retta, cioè si ricadrebbe sul teorema del Signor ENNEPER, già dimostrato nel §. 2.

Escludendo dunque questi due casi, le due prime equazioni (22) danno

$$(l_1 m'_1 - l'_1 m_1)\, \xi'_1 = m'_1 \cos\theta - m_1 x\,,$$

$$(l_1 m'_1 - l'_1 m_1)\, \eta'_1 = l_1 x - l'_1 \cos\theta\,,$$

da cui quadrando e sommando si deduce

$$(l_1 m'_1 - l'_1 m_1)^2 = (\epsilon'^2 - n'^2_1) \cos^2\theta + (1 - n^2_1)\, x^2 + 2 x n_1 n'_1 \cos\theta.$$

Ma $$(l_1 m'_1 - l'_1 m_1)^2 = (l^2_1 + m^2_1)(l'^2_1 + m'^2_1) - (l_1 l'_1 + m_1 m'_1)^2$$

$$= \epsilon'^2 (1 - n^2_1) - n'^2_1,$$

dunque sostituendo

$$(\epsilon'^2 - n'^2_1) \operatorname{sen}^2\theta = x^2 + (\epsilon'^2 - x^2)\, n^2_1 + 2 x n_1 n'_1 \cos\theta$$

da cui

23. $$n'_1 \operatorname{sen}^2\theta + x n_1 \cos\theta = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - n^2_1}\,\sqrt{\epsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2}.$$

Quest' equazione differenziale serve a determinare n_1; conosciuta questa quantità, le l_1, m_1, ξ_1, η_1 sono date da semplici quadrature. Infatti se si pone

24. $$l_1 = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi\,, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi\,, \qquad n_1 = \cos\varphi$$

si ha

$$\epsilon'^2 = \varphi'^2 + \psi'^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

e quindi

25. $$\psi = \int \frac{\sqrt{\epsilon'^2 - \varphi'^2}}{\operatorname{sen}\varphi}\, du\,,$$

equazione che fa conoscere ψ e quindi l_1, m_1. I precedenti valori di ξ'_1, η'_1 assumono poi la forma

26. $$\xi'_1 = \frac{m'_1 \cos\theta - x m_1}{\psi' \operatorname{sen}^2\varphi}\,, \qquad \eta'_1 = -\frac{l'_1 \cos\theta - x l_1}{\psi' \operatorname{sen}^2\varphi}\,,$$

e forniscono coll' integrazione le coordinate della direttrice trasformata.

Siccome tutte le operazioni necessarie per la risoluzione del presente problema non implicano veruna impossibilità, così possiamo in generale enunciare il teorema:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una sua linea qualsivoglia diventi piana.

Consideriamo alcuni casi particolari.

1°) La direttrice sia una trajettoria ortogonale delle generatrici.

Avendosi $\theta = \frac{\pi}{2}$, la (23) diventa

$$u'_1 = \sqrt{1 - u_1^2}\,\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}$$

da cui, confrontando colle (24.) (25.), si trae

$$\varphi = -\int \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}\,du\,, \qquad \psi = \int \frac{x\,du}{\operatorname{sen}\varphi}\,.$$

Sostituendo nelle (26.) i valori di l_1, m_1, ψ' si ha

$$\xi'_1 = -\operatorname{sen}\psi\,, \qquad \eta'_1 = \cos\psi\,,$$

da cui

$$\xi''_1 = -\cos\psi.\psi'\,, \qquad \eta''_1 = -\operatorname{sen}\psi.\psi'$$

e quindi

$$\rho_1 = \pm\frac{\operatorname{sen}\varphi}{x}\,,$$

espressione che avrebbe potuto dedursi dalle (11.) (12.) le quali, per $\theta = \frac{\pi}{2}$, danno

$$\frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = -x\,,$$

osservando che φ è manifestamente il complemento dell' angolo che il piano tangente della superficie trasformata fa col piano della nuova direttrice, cioè $\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_1$.

Se supponiamo che la superficie sia costituita dalle normali principali di una linea a doppia curvatura, e quindi che si abbia

$$l = a_2\,, \quad m = b_2\,, \quad n = c_2\,; \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\,, \quad x = -\frac{1}{\rho}\,,$$

troviamo

$$\varphi = -\int \frac{du}{r}\,, \qquad \psi = -\int \frac{du}{\rho\operatorname{sen}\varphi}$$

da cui

$$\xi_1 = -\int \operatorname{sen}\psi\,du\,, \qquad \eta_1 = \int \cos\psi\,du\,, \qquad \rho_1 = \rho\operatorname{sen}\psi\cdot$$

$$l_1 = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,, \qquad n_1 = \cos\varphi.$$

In questo caso si vede che ψ coincide, in valore assoluto, col complesso degli angoli di torsione della linea considerata.

Delle quattro costanti arbitrarie che entrano in queste formole tre corrispondono ad un semplice spostamento della direttrice trasformata nel piano xy, ma la quarta somministra, in generale, trasformazioni realmente distinte fra loro.

2°) La direttrice sia una linea geodetica.

Avendosi in tal caso dalla (11.) $\varkappa = -\theta' \operatorname{sen} \theta$, l'equazione (23.) diventa

$$n'_1 \operatorname{sen} \theta - n_1 \cos \theta . \theta' = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta - n_1^2}\, \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}.$$

Quest'equazione ha per integrale generale

$$n_1 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \left[\int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen} \theta} du \right]$$

e possiede inoltre un'integrale singolare, che è

$$n_1 = \operatorname{sen} \theta.$$

Una considerazione semplicissima mostra che la soluzione del nostro problema è contenuta in questo integrale singolare. Infatti quando una linea geodetica si trasforma in linea piana, essa continua ad essere linea geodetica della superficie trasformata, e quindi le rette normali a questa superficie nei punti di essa debbono trovarsi nel suo piano ed essere normali alla curva stessa. Per conseguenza le generatrici della superficie trasformata debbono projettarsi sul piano della nuova direttrice tangenzialmente alla direttrice stessa, epperò debbono fare l'angolo θ col piano xy sul quale essa è tracciata. Dunque dev' essere $n_1 = \operatorname{sen} \theta$, appunto com'è espresso dell'integrale singolare.

Questo ragionamento cessa d'essere esatto solamente quando la direttrice si trasforma in una linea retta. A questo caso, già trattato nel §. 2°, corrisponde appunto l'integrale generale, del quale perciò non ci occuperemo.

Poichè dunque si ha $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, dalla (25.) si trae

$$\psi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos \theta} du,$$

quindi

$$l_1 = \cos \theta \cos \psi, \qquad m_1 = \cos \theta \operatorname{sen} \psi, \qquad n_1 = \operatorname{sen} \theta;$$

poscia dalle (26.) si deduce

$$\xi_1 = \int \cos \psi \, du, \qquad \eta_1 = \int \operatorname{sen} \psi \, du.$$

Si ha poi $\qquad \xi''_1 = -\operatorname{sen} \psi . \psi', \qquad \eta''_1 = \cos \psi . \psi'$

da cui

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta}.$$

Così sono determinati tutti gli elementi della superficie trasformata.

Rammentiamo, a scanso d'equivoci, che la presente trasformazione non può essere applicata al caso in cui la geodetica incontri tutte le generatrici ortogonalmente o, per meglio dire, che in questo caso la trasformata piana non può essere altro che una linea retta.

Osserveremo anche che la trasformazione considerata in questo §. poteva, nel caso della linea geodetica, essere trattata più direttamente deducendo dalle equazioni

$$l_1\xi'_1 + m_1\eta'_1 = \cos\theta\,,$$

$$l_1\xi''_1 + m_1\eta''_1 = 0\,,$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1\,,$$

i valori di l_1, m_1, n_1 e sostituendoli nella

$$l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1 = \varepsilon'^2,$$

nel qual modo si sarebbe ottenuta un' equazione alle derivate seconde in ξ_1, η_1 equivalente alla

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta},$$

ottenuta anche coll'altro metodo, e che poscia, combinata colla

$$\xi'^2_1 + \eta'^2_1 = 1\,,$$

avrebbe dati gli stessi valori trovati pocanzi. Applicheremo questo processo alla dimostrazione del teorema che forma l'oggetto del §. seguente, e ce ne serviremo più tardi per istabilire una formola generale.

§. 6°

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una qualunque delle sue linee geodetiche si trasformi in un' elica cilindrica.

Supponiamo infatti che il cilindro sul quale l'elica dev'essere tracciata abbia le generatrici parallele all'asse delle z, e chiamiamo μ_1 l'angolo costante formato dal-

l'elica colle generatrici stesse. Bisognerà porre

$$27. \qquad \zeta'_1 = \cos \mu_1 ,$$

e quest'equazione, combinata colle cinque seguenti

$$28. \quad \begin{cases} l_1\xi'_1 + m_1\eta'_1 = \cos\theta - n_1\cos\mu_1, \quad l_1\xi''_1 + m_1\eta''_1 = 0, \quad \xi'^2_1 + \eta'^2_1 = \operatorname{sen}^2\mu_1, \\ l^2_1 + m^2_1 + n^2_1 = 1, \quad l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1 = \epsilon'^2, \end{cases}$$

determinerà completamente le sei quantità relative alla superficie trasformata, ciò che dimostra la possibilità della trasformazione, nella quale è evidente che il valore di μ_1 può assumersi ad arbitrio. Bisogna eccettuare il caso in cui si avesse simultaneamente $\cos\mu_1 = 0$, $\cos\theta = 0$, caso che venne già escluso nel §. precedente e del quale si è già parlato; o, più in generale, in cui s'avesse $\mu_1 = \theta$, posto che θ fosse costante.

Osserviamo anzitutto che essendo in generale

$$\frac{1}{\rho^2_1} = (\eta'_1\zeta''_1 - \eta''_1\zeta'_1)^2 + (\zeta'_1\xi''_1 - \zeta''_1\xi'_1)^2 + (\xi'_1\eta''_1 - \xi''_1\eta'_1)^2$$
$$= \xi''^2_1 + \eta''^2_1 + \zeta''^2_1 ,$$

si ha nel nostro caso

$$\frac{1}{\rho^2_1} = (\xi''^2_1 + \eta''^2_1)\cos^2\mu_1 + (\xi'_1\eta''_1 - \xi''_1\eta'_1)^2 = \xi''^2_1 + \eta''^2_1 ,$$

quindi

$$29. \qquad \frac{1}{\rho_1} = \xi''^2_1 + \eta''^2_1 , \qquad \xi'_1\eta''_1 - \xi''_1\eta'_1 = \frac{\operatorname{sen}\mu_1}{\rho_1}.$$

Dalla seconda di queste equazioni, dalla terza delle (28.) e dalla

$$\xi'_1\xi''_1 + \eta'_1\eta''_1 = 0$$

si deducono inoltre i valori seguenti:

$$30. \qquad \xi''_1 = -\frac{\eta'_1}{\rho_1\operatorname{sen}\mu_1} , \qquad \eta''_1 = \frac{\xi'_1}{\rho_1\operatorname{sen}\mu_1}.$$

Ciò premesso, le due prime equazioni (28.) danno, viste le (30.),

$$l_1\operatorname{sen}^2\mu_1 = (\cos\theta - n_1\cos\mu_1)\,\xi'_1 ,$$

$$m_1\operatorname{sen}^2\mu_1 = (\cos\theta - n_1\cos\mu_1)\,\eta'_1 ,$$

da cui quadrando e sommando si cava

$$n_1^2 - 2n_1 \cos\mu_1 \cos\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\mu_1 = 0 ,$$

e quindi $\quad n_1 = \cos(\mu_1 \pm \theta), \quad \cos\theta - n_1 \cos\mu_1 = \operatorname{sen}\mu_1 \operatorname{sen}(\mu_1 \pm \theta).$

Per conseguenza, prendendo il solo segno inferiore, affine di restare in accordo colla convenzione stabilita nel §. 1°, si ha

31. $$l_1 = \frac{\xi'_1 \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}{\operatorname{sen}\mu_1}, \quad m_1 = \frac{\eta'_1 \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}{\operatorname{sen}\mu_1}, \quad n_1 = \cos(\mu_1 - \theta).$$

Sostituendo questi valori nell' ultima delle (28.) si trova

$$\varepsilon'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(\mu_1 - \theta)}{\rho_1^2 \operatorname{sen}^2\mu_1} + \theta'^2$$

da cui

32. $$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{sen}\mu_1 \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}.$$

Chiamando R' il raggio di curvatura della sezione retta del cilindro su cui è tracciata l' elica, si ha, come è noto, $R' = \rho_1 \operatorname{sen}^2\mu_1$, e quindi

33. $$\frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\mu_1 \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}.$$

Sostituendo nelle (30) il valore di ρ_1 dato dalla (32.) e osservando la terza delle equazioni (28), si trovano le formole

$$\frac{\xi''_1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\mu_1 - \xi'^2_1}} = -\frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}, \quad \frac{\eta''_1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\mu_1 - \eta'^2_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)},$$

da cui, ponendo

34. $$\varphi = \int du \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)},$$

si cava

35. $$\xi_1 = \operatorname{sen}\mu_1 \int \cos\varphi du, \quad \eta_1 = \operatorname{sen}\mu_1 \int \operatorname{sen}\varphi du, \quad \zeta_1 = u \cos\mu_1,$$

e quindi

36. $$l_1 = \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)\cos\varphi, \quad m_1 = \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)\operatorname{sen}\varphi, \quad n_1 = \cos(\mu_1 - \theta).$$

Così si hanno per mezzo di sole quadrature tutte le formole relative alla nostra quistione. Le generatrici della superficie trasformata risultano manifestamente tan-

genti al cilindro, come doveva essere, perchè l'elica è per ipotesi una geodetica non solo della superficie cilindrica ma anche della superficie rigata.

Faremo le due segnenti applicazioni:

1°) Le formole

$$\xi = a \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a}, \qquad \eta = a \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a}, \qquad \zeta = u \cos \mu,$$

$$l = - \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a}, \quad m = \operatorname{sen} \nu \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a}, \quad n = \cos \nu,$$

rappresentano un elicoide rigato, la cui elica di stringimento (di cui u è l' arco) è tracciata sopra un cilindro di raggio a, e fa colle generatrici di questo l' angolo μ, mentre ν è l' angolo che le generatrici dell' elicoide fanno con quelle del cilindro.

Se poniamo per brevità

$$\frac{a \operatorname{sen} (\nu + \mu_1 - \mu) \operatorname{sen} \mu_1}{\operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \mu} = a_1,$$

dove μ_1 è una costante arbitraria, si trova che φ può prendersi eguale a $\frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a} + \frac{\pi}{2}$, poichè i valori della costante da aggiungersi all' integrale (34.) non influiscono che sulla posizione assoluta della superficie trasformata; sostituendo questo valore di φ nelle formole (35.) (36.), si ha

$$\xi_1 = a_1 \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1}, \qquad \eta_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1}, \qquad \zeta_1 = u \cos \mu_1,$$

$$l_1 = - \operatorname{sen} (\nu + \mu_1 - \mu) \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1}, \qquad m_1 = \operatorname{sen} (\nu + \mu_1 - \mu) \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1},$$

$$n_1 = \cos (\nu + \mu_1 - \mu),$$

formole perfettamente analoghe a quelle che rappresentano il primo elicoide, e che mostrano essere $a_1, \mu_1, \nu + \mu_1 - \mu$ quantità di egual significato delle a, μ, ν, rispetto all' elicoide trasformato.

Facendo $\mu_1 = 0$ si avrebbe l'elicoide a direttrice rettilinea, e facendo $\mu_1 = \frac{\pi}{2} + \mu - \nu$ si avrebbe l' elicoide a piano direttore. Finalmente facendo $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$ si avrebbe un iperboloide di rotazione, superficie sulla quale sono applicabili, come è noto, tutti gli elicoidi contenuti nelle precedenti equazioni. Le formole relative a questo caso

sono:

$$\xi_1 = \frac{a\cos(\mu-\nu)}{\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}\cos\frac{u\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}{a\cos(\mu-\nu)}, \qquad \eta_1 = \frac{a\cos(\mu-\nu)}{\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}\operatorname{sen}\frac{u\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}{a\cos(\mu-\nu)},$$

$$\zeta_1 = 0,$$

$$l_1 = -\cos(\mu-\nu)\operatorname{sen}\frac{u\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}{a\cos(\mu-\nu)}, \qquad m_1 = \cos(\mu-\nu)\cos\frac{u\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\nu}{a\cos(\mu-\nu)},$$

$$n_1 = \operatorname{sen}(\mu-\nu),$$

che sostituite nelle (1) danno, coll'eliminazione di u, v,

$$\frac{x^2+y^2}{\cos^2(\mu-\nu)} - \frac{z^2}{\operatorname{sen}^2(\mu-\nu)} = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\mu\operatorname{sen}^2\nu}.$$

Il caso di eccezione, già menzionato da principio, si verifica attualmente per $\mu_1 = \mu - \nu$, come è facile riconoscere *a posteriori*. Questo valore della costante μ_1 deve pertanto ritenersi escluso.

2°) Supponiamo che la direttrice della prima superficie sia l'asse delle z e poniamo quindi:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = u,$$

$$l = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \qquad m = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, \qquad n = \cos\theta$$

In questo caso si ha dalla (34)

$$\varphi = \int \frac{\psi'\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\mu_1-\theta)}\,du,$$

valore che sostituito nelle formole (35) (36) porgerà la trasformazione richiesta.

Se si suppone θ costante ed $= \frac{1}{2}\mu_1$, si ha semplicemente $\varphi = \psi$, e quindi

$$l_1 = l, \qquad m_1 = m, \qquad n_1 = n,$$

cioè le generatrici della superficie trasformata diventano parallele a quelle della primitiva, caso particolare della quistione trattata nel §. 4°. Otteniamo così un teorema che può essere enunciato come segue:

Sopra un cilindro a base qualunque si tracci un' elica formante colle generatrici l' angolo arbitrario μ, e si faccia scorrere lungo quest' elica, tangenzialmente al cilindro, una retta inclinata sulle generatrici dell' angolo $\frac{1}{2}\mu$. La superficie gobba ottenuta in tal modo è sovrapponibile a quella generata da una retta che si mantiene costantemente parallela alle generatrici della superficie precedente, mentre

un suo punto si muove sopra un asse parallelo alle generatrici del cilindro e percorre su quest' asse lunghezze costantemente eguali agli archi corrispondenti dell' elica.

§. 7.°

Le considerazioni geometriche di cui abbiamo fatto uso nel §. 2° potrebbero servire a dimostrare facilmente che si può sempre trasformare una superficie rigata in modo che le sue generatrici diventino parallele a quelle di un cono direttore dato ad arbitrio (il quale però non può mai, tranne quando la superficie è cilindrica, essere ridotto ad una semplice retta). Questa proprietà fu già stabilita dal Sig. Minding (l. c.) e più recentemente dal Sig. Bour (*), il quale fondò su di essa un' ingegnosa classificazione delle superficie rigate. Perciò noi non ritorneremo su questo argomento e ci limiteremo ad esporre qualche considerazione relativa al caso in cui il cono assunto come direttore sia retto.

In quest' ipotesi, chiamando λ l' angolo che le generatrici del cono fanno col suo asse, che supponiamo parallelo ad Oz, si può porre

$$l_1 = \operatorname{sen}\lambda \cos\varphi\,, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi\,, \qquad n_1 = \cos\lambda$$

da cui

$$\varepsilon' = \varphi' \operatorname{sen}\lambda.$$

Le equazioni che devono essere soddisfatte dalle funzioni ξ_1, η_1, ζ_1 sono quindi le seguenti:

$$37. \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1\,, \\ &(\xi'_1 \cos\varphi + \eta'_1 \operatorname{sen}\varphi) \operatorname{sen}\lambda + \zeta'_1 \cos\lambda = \cos\theta\,, \\ &-(\xi'_1 \operatorname{sen}\varphi - \eta'_1 \cos\varphi)\,\varepsilon' = \varkappa. \end{aligned} \right.$$

La projezione sul piano xy della generatrice trasformata è rappresentata da

$$(x - \xi_1) \operatorname{sen}\varphi - (y - \eta_1) \cos\varphi = 0\,,$$

epperò l' inviluppo di tutte le projezioni analoghe deve soddisfare all'equazione

$$\{ (x - \xi_1) \cos\varphi + (y - \eta_1) \operatorname{sen}\varphi \}\, \varphi' = \xi'_1 \operatorname{sen}\varphi - \eta'_1 \cos\varphi\,,$$

ossia, per le (1.),

$$38. \qquad \xi'_1 \operatorname{sen}\varphi - \eta'_1 \cos\varphi = v\varphi' \operatorname{sen}\lambda.$$

Questa equazione fra u e v, alla quale si perverrebbe egualmente supponendo va-

(*) Memoria citata, p. 43.

riabile l' angolo λ, rappresenta sulla superficie trasformata, la curva secondo cui la superficie stessa è inviluppata da una superficie cilindrica avente le generatrici parallele all' asse delle z. La curva corrispondente sulla superficie primitiva è rappresentata dalla stessa equazione fra u e v, che, in virtù dell' ultima equazione (37.) può scriversi, nell' ipotesi di λ costante e quindi di $\varphi' \operatorname{sen} \lambda = \varepsilon'$,

$$\varkappa + v\varepsilon'^2 = 0.$$

Sostituendo il valore di v cavato da quest' equazione nelle (1.) si hanno le coordinate rettangole della curva in quistione, che sono

$$x = \xi - \frac{\varkappa l}{\varepsilon'^2}, \qquad y = \eta - \frac{\varkappa m}{\varepsilon'^2}, \qquad z = \zeta - \frac{\varkappa n}{\varepsilon'^2}.$$

Da queste si deduce

$$x' = \xi' - \frac{\varkappa l'}{\varepsilon'^2} - l\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

$$y' = \eta' - \frac{\varkappa m'}{\varepsilon'^2} - m\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

$$z' = \zeta' - \frac{\varkappa n'}{\varepsilon'^2} - n\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

e quindi

$$l'x' + m'y' + n'z' = 0,$$

risultato il quale c' insegna che la linea in discorso non è altro che la linea di stringimento. Dunque:

La linea di stringimento d' una superficie rigata avente tutte le generatrici egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso è la linea di contatto fra questa superficie e la superficie cilindrica normale al piano ed involvente la superficie data.

Reciprocamente:

Se la linea di contatto fra una superficie gobba ed una superficie cilindrica involvente è la linea di stringimento della prima superficie, le generatrici di questa sono tutte inclinate rispetto a quelle della seconda.

Infatti se si suppone λ variabile e si considera come direttrice la stessa linea di stringimento, cioè si pone $\varkappa = 0$, si ottiene al posto della terza equazione (37.) la seguente:

$$\{ (\xi'_1 \cos\varphi + \eta'_1 \operatorname{sen}\varphi) \cos\lambda - \zeta'_1 \operatorname{sen}\lambda \} \lambda' = (\xi'_1 \operatorname{sen}\varphi - \eta'_1 \cos\varphi) \varphi' \operatorname{sen}\lambda,$$

e quindi, in virtù della seconda equazione (37.), che rimane invariata, e della

$\zeta'_1 = \cos(\lambda + \theta)$, l' equazione (38.) diventa

$$\lambda' \operatorname{sen} \theta = v\varphi'^2 \operatorname{sen}^2\lambda.$$

Ora la linea di contatto della superficie trasformata colla superficie cilindrica deve, per ipotesi, coincidere colla direttrice, cioè colla $v = 0$, dunque $\lambda' \operatorname{sen} \theta = 0$. Se la superficie non è sviluppabile, sen θ non può essere nullo, dunque bisogna che si abbia $\lambda' = 0$ cioè $\lambda = \text{cost.}$

Del resto queste proprietà si possono rendere evidenti per mezzo di facili considerazioni geometriche.

Infatti quando due rette concorrenti in un punto dello spazio sono egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso è chiaro che, projettando su questo piano la normale comune condotta ad esse dal loro punto d' intersezione si ottiene una retta che divide in due parti eguali l' angolo formato dalle projezioni delle due rette. Di qui risulta che se due rette infinitamente vicine e non situate in un medesimo piano fanno lo stesso angolo con un piano fisso, la direzione della loro minima distanza deve projettarsi su questo piano parallelamente alla bissettrice dell' angolo infinitesimo formato dalle proiezioni delle due rette. Ora la lunghezza della minima distanza essendo infinitamente piccola, anche la sua projezione deve esser tale e quindi, avuto riguardo alla direzione che prende questa projezione, è chiaro che le projezioni dei piedi della minima distanza anzidetta debbono cadere sulle projezioni delle due rette, in punti infinitamente vicini all' intersezione di queste due projezioni.

Applicando quest' osservazione alle successive coppie di generatrici infinitamente vicine di una superficie gobba avente tutte le generatrici egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso, se ne conclude immediatamente che « *la linea di stringimento di una tale superficie gobba si projetta su questo piano secondo l' inviluppo delle projezioni delle generatrici.* »

Inversamente, se due generatrici contigue *non* fanno lo stesso angolo con un piano fisso, la direzione della minima distanza projettata su questo piano forma un angolo finito colle projezioni delle generatrici. Dunque affinchè la projezione della minima distanza sia infinitamente piccola dello stess' ordine dell' angolo compreso dalle due generatrici e quindi anche dalle loro projezioni, bisogna che le projezioni dei piedi di questa minima distanza cadano ad una distanza *finita* dall' intersezione delle due projezioni, donde risulta evidentemente che la projezione della linea di stringimento *non* può coincidere coll' inviluppo delle projezioni delle generatrici. Dunque insieme col teorema precedente sussiste il teorema inverso, e quindi anche il reciproco.

Le considerazioni precedenti rendono intuitive alcune proprietà notate dal sig. Bon-

NET (*), le quali del resto sono una conseguenza immediata della formola (11.). Se le generatrici di una superficie gobba sono tutte egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso, esse fanno pure un angolo costante colle generatrici della superficie cilindrica normale a questo piano ed involvente la superficie gobba lungo la sua linea di stringimento. Dunque se questa linea facesse un angolo costante colle generatrici della superficie gobba, farebbe del pari un angolo costante con quelle della superficie cilindrica, ossia sarebbe un' elica cilindrica, epperò una linea geodetica tanto della superficie cilindrica quanto della superficie gobba tangente. Reciprocamente se la linea di stringimento fosse una geodetica della superficie gobba, essa sarebbe tale anche rispetto alla superficie cilindrica e quindi farebbe un angolo costante tanto colle generatrici di questa quanto con quelle della superficie gobba. Ora ogni superficie gobba può trasformarsi in un' altra avente tutte le generatrici egualmente inclinate sopra un piano fisso, e le proprietà caratteristiche delle linee geodetiche e della linea di stringimento si mantengono inalterate nella trasformazione; è dunque chiaro che le osservazioni precedenti conducono a questo teorema:

Se la linea di stringimento d' una superficie gobba incontra tutte le generatrici sotto un angolo costante, essa è al tempo stesso linea geodetica; e, reciprocamente, *se essa è linea geodetica, essa attraversa tutte le generatrici sotto un angolo costante.*

Sussiste anche l' altra proprietà, già enunciata dal sig. BONNET (ibid.) che « *se una linea geodetica incontra tutte le generatrici sotto un angolo costante, essa è la linea di stringimento.* » Infatti trasformiamo la superficie in modo che la geodetica in questione diventi una linea retta: tutte le generatrici della superficie trasformata risulteranno egualmente inclinate su questa retta e quindi, per un precedente teorema, la retta stessa sarà linea di stringimento della superficie trasformata. Dunque ec.

§. 8.

Chiamando a, b, c i coseni degli angoli che fa coi tre assi la normale alla superficie rigata nel punto (u) della direttrice, avremo

$$39.\qquad a=\frac{\eta' n-\zeta' m}{\operatorname{sen}\theta},\qquad b=\frac{\zeta' l-\xi' n}{\operatorname{sen}\theta},\qquad c=\frac{\xi' m-\eta' l}{\operatorname{sen}\theta}.$$

(*) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cah. XXXII, p. 71. Un teorema molto più generale è stato dato dal Sig. BRIOSCHI nel *Giornale dell' Istituto Lombardo* t. IX, fasc. 54.

I teoremi del Sig. BONNET sono stati dimostrati geometricamente dal Sig. PAUL SERRET: vedi *Théorie nouvelle des courbes à double courbure* p. 149.

Affinchè la superficie trasformata sia tangente, in tutti i punti della nuova direttrice, ad un cilindro normale al piano xy, bisognerà che si abbia

40. $$\xi'_1 m_1 - \eta'_1 l_1 = 0\,,$$

e quest'equazione combinata colle solite cinque (7.) ed (8.) potrà servire a determinare le sei funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1. Per questa ricerca si potrà procedere nel modo seguente:

Dalle (20.) si ricava:

$$\xi' m - \eta' l = \frac{1}{\varepsilon'^2}\left\{ -\varkappa\,(lm' - l'm) \pm n'\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} \right\},$$

e quindi la condizione (40.) può essere surrogata dalla seguente:

$$\varkappa^2\,(l_1\, m'_1 - l'_1\, m_1)^2 = n'^2_1\,(\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2)$$

ovvero

$$n'^2_1 \operatorname{sen}^2\theta = \varkappa^2\,(1 - n_1^2),$$

da cui si cava

41. $$n_1 = \cos\varphi\,, \qquad \text{ponendo} \qquad \varphi = \int \frac{\varkappa du}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Quindi ponendo di nuovo

42. $$\psi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}\, du$$

si hanno i valori di l_1, m_1, n_1, dalle formole

33. $$l_1 = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi\,, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi\,, \qquad n_1 = \cos\varphi.$$

Se $\varkappa$ fosse $= 0$, si avrebbe $\varphi = \text{cost.}$ e si ricadrebbe sopra un teorema dimostrato nel §. precedente. Se la superficie primitiva fosse sviluppabile si avrebbe

$$\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0 \qquad \text{e quindi } \psi = \text{cost.},$$

cioè la superficie trasformata sarebbe piana. Ma se la direttrice fosse lo stesso spigolo di regresso, si avrebbe simultaneamente $\varkappa = 0$, $\theta = 0$ e le formole di trasformazione diventerebbero indeterminate, come è manifesto *a priori*.

È chiaro che l' angolo fatto dalla direttrice trasformata colle generatrici del cilindro involvente è $= \varphi + \theta$, e che l' angolo fatto dalla tangente alla sezione retta del cilindro stesso coll' asse delle x è $= \psi$. Ne risulta che

44. $$\xi'_1 = \operatorname{sen}(\varphi + \theta)\cos\psi\,, \qquad \eta'_1 = \operatorname{sen}(\varphi + \theta)\operatorname{sen}\psi\,, \qquad \zeta'_1 = \cos(\varphi + \theta),$$

valori che potrebbero dedursi dalle (20.), cambiando l, m, n, in l_1, m_1, n_1.

Da queste formole si deduce

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{(x+\theta'\operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}+\frac{(\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta-x^2)\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}.$$

od anche, per la (11),

45.
$$\frac{1}{\rho_1^2}=\left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2+\frac{(\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta-x^2)\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Si determina facilmente anche la curvatura $\frac{1}{R'}$ della sezion retta del cilindro. Infatti denominando $\frac{1}{R_1}$ la curvatura della sezione normale fatta nella superficie trasformata tangenzialmente alla nuova direttrice, si ha dalla (45.)

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\operatorname{sen}(\varphi+\theta).\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta-x^2}}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta},$$

e quindi

46.
$$\frac{1}{R'}=\frac{\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta-x^2}}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\varphi+\theta)}.$$

Gli sviluppi che precedono ci permettono di enunciare il seguente teorema:

È sempre possibile trasformare una superficie rigata in modo che una sua linea qualunque diventi linea di contatto fra la superficie trasformata ed una superficie cilindrica.

Quando la direttrice è una linea geodetica si ha $x=-\theta'\operatorname{sen}\theta$ quindi

$$\varphi=\theta_0-\theta, \qquad \zeta'_1=\cos\theta_0,$$

donde emerge essere la nuova direttrice un'elica, come doveva essere. Si ha pure in questo caso:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{\operatorname{sen}\theta_0\sqrt{\varepsilon'^2-\theta'^2}}{\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)}, \qquad \frac{1}{R'}=\frac{\sqrt{\varepsilon'^2-\theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}(\theta_0-\theta)},$$

formole che concordano colle (32.) (33.).

Quando la direttrice è la linea di stringimento si trova

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\theta'^2+\frac{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}, \qquad \frac{1}{R'}=\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(\varphi+\theta)}$$

dove φ è un angolo costante.

Quando la direttrice è una trajettoria ortogonale delle generatrici si ha

$$\frac{1}{\rho_1^2} = x^2 + (\varepsilon'^2 - x^2)\cot g^2\varphi, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - x^2}}{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}.$$

§. 9°

Accenneremo per ultimo una condizione di natura molto generale che si può prescrivere alla trasformazione.

Ponendo per brevità

$$M = (mn' - m'n)\,\xi' + (nl' - n'l)\,\eta' + (lm' - l'm)\,\zeta',$$

$$N = (\eta'\zeta'' - \eta''\zeta')\,l + (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')\,m + (\xi'\eta'' - \xi''\eta')\,n,$$

si riconosce facilmente che l'equazione

$$M dv - N du = 0$$

definisce per ogni punto (u) della direttrice $v = 0$, la direzione $\frac{dv}{du}$ coniugata rispetto a quella della direttrice stessa in quel punto; laonde se in luogo del rapporto $\frac{dv}{du}$ si sostituisce una funzione determinata di u, l'equazione risultante esprime la condizione che dev' essere soddisfatta affinchè la direttrice abbia in ciascun punto la tangente coniugata colla direzione definita dalla funzione stessa. Così per es. l'equazione $N = 0$ esprime la condizione perchè la direttrice sia linea assintotica (ciò che segue senz' altro dal significato geometrico dell'espressione di N). Invece l'equazione $M = 0$ esprime la condizione perchè la direttrice sia linea coniugata rispetto alle generatrici rettilinee. È abbastanza chiaro per sè che quest' ultima circostanza non può verificarsi che per le superficie sviluppabili: ciò emerge del resto immediatamente dalle nostre formole, se si osserva che le (20.) danno

$$M = A\xi' + B\eta' + C\zeta' = \pm\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2},$$

e che, come abbiamo dichiarato nel §. 1°, la quantità $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2}$ non può annullarsi che sulle superficie sviluppabili.

Affinchè la direzione $\frac{dv}{du}$ sia normale a quella della direttrice bisogna porre

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{\cos\theta},$$

epperò l' equazione

$$M + N \cos\theta = 0$$

esprime la condizione perchè la direttrice $v = 0$ sia linea di curvatura della superficie rigata. Quando la superficie non è sviluppabile si vede che la precedente condizione non può mai essere soddisfatta per $\theta = \frac{\pi}{2}$, lo che rientra nell'osservazione precedente (*).

Indicando con N_1 ciò che diventa N quando si passa dalla superficie primitiva alla trasformata, è chiaro che aggiungendo alle cinque relazioni (7.) (8.) la

$$47. \qquad N_1 \cos\theta \pm \sqrt{\epsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0,$$

si potranno, in generale, determinare le sei funzioni $\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ l_1, m_1, n_1$, lo che equivale a dire che « *in generale si può trasformare una superficie gobba in modo che una linea tracciata sovr' essa, e che non sia nè una generatrice nè una trajettoria ortogonale delle generatrici, diventi linea di curvatura della superficie trasformata.*

Il valore di N_1 non contiene, oltre le quantità $\theta, \varkappa, \epsilon$, che il raggio di curvatura ρ_1 della direttrice trasformata. Infatti dalle tre equazioni

$$l_1\xi'_1 + m_1\eta'_1 + n_1\zeta'_1 = \cos\theta,$$

$$l_1\xi''_1 + m_1\eta''_1 + n_1\zeta''_1 = \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho},$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

si deducono i valori seguenti di l_1, m_1, n_1

$$48. \quad \left\{ \begin{aligned} l_1 &= \alpha_1 \cos\theta + \varpi\rho_1\alpha_2 + \alpha_3 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}, \\ m_1 &= \beta_1 \cos\theta + \varpi\rho_1\beta_2 + \beta_3 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}, \\ n_1 &= \gamma_1 \cos\theta + \varpi\rho_1\gamma_2 + \gamma_3 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}, \end{aligned} \right. \qquad \varpi = \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho}$$

dove le quantità α, β, γ hanno i significati con cui si usarono nel §. 3.° Da questi valori si deduce:

$$49. \qquad N_1 = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}}{\rho_1}.$$

(*) La proprietà che « *ogni superficie rigata avente per linea di curvatura una trajettoria ortogonale delle sue generatrici è necessariamente una superficie sviluppabile* » può riguardarsi come una conseguenza dell'altra che « *le tangenti condotte dai punti di una linea a due differenti sue sviluppate formano fra loro un angolo costante.* »

Sostituendo questo valore nell'equazione (47.) si ottiene

$$50. \qquad \frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2 + \varpi^2 \cos^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta},$$

valore sempre reale perchè $\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2$ è quantità positiva (§. 1°).

Chiamando $\frac{1}{R_1}$ la curvatura normale della direttrice trasformata, si ha, pel valore di ϖ,

$$51. \qquad \frac{1}{R_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - x^2}}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta},$$

valore che diventa indeterminato quando la direttrice primitiva è una trajettoria ortogonale delle generatrici di una superficie sviluppabile, come è evidente *a priori*.

Quando la direttrice è geodetica si ha $\varpi = 0$, $x = -\theta' \operatorname{sen}\theta$, e quindi

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta},$$

valore che coincide con quello trovato nel §. 4°, applicazione 2ª; così doveva essere infatti poichè, come è notissimo, una linea geodetica non può essere al tempo stesso linea di curvatura, senza essere piana.

Se la direttrice fosse la linea di stringimento si avrebbe $x = 0$, $\varpi = -\theta' \operatorname{sen}\theta$, epperò

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 + \theta'^2 \cos^2\theta}}{\cos\theta}, \qquad \frac{1}{R_1} = \pm \frac{\varepsilon'}{\cos\theta}.$$

§. 10°

Noi non vogliamo moltiplicare maggiormente questi esempi, sufficienti a mostrare l'opportunità del metodo.

Ognuno vedrà che molte delle quistioni da noi trattate sono suscettibili di generalizzazione. Così per es. il problema del §. 5° è un caso particolare di quest'altrò: *Trasformare una superficie rigata in modo che una linea data sovr'essa si disponga sopra un'altra superficie data;* quello del §. 6° rientra nel seguente: *Trasformare una superficie rigata in modo che una delle sue linee geodetiche diventi linea geodetica di un'altra superficie;* e quest'ultimo è alla sua volta contenuto in quest'altro, generalizzazione di quello risoluto nel §. 8°: *Trasformare una superficie rigata in modo che una linea data sovr'essa diventi linea di contatto fra la superficie stessa ed un'altra superficie data;* e così via. La risoluzione

di queste e d' altrettali quistioni sarebbe certamente meno semplice di quella che abbiamo potuto conseguire nei casi speciali da noi trattati, ma appunto perciò meriterebbe d' essere fatta argomento d' ulteriori ricerche.

Termineremo coll' osservare che in generale non è possibile trasformare la direttrice (che è del resto una linea arbitrariamente tracciata sulla superficie) in un' altra linea di specie data, poichè ciò imporrebbe *due* condizioni alla trasformazione. Può accadere però in certe circostanze, che questa trasformazione sia possibile, e ne abbiamo un esempio assai ovvio nella quistione trattata nel §. 6°. Per poter giudicare in ogni caso della possibilità di queste trasformazioni noi stabiliremo un' equazione, che deve riguardarsi come fondamentale nella teoria delle superficie rigate, poichè esprime una condizione che deve essere necessariamente soddisfatta da ogni curva trasformata, indipendentemente dalla superficie in cui si trasforma la superficie primitiva.

Quest' equazione si ottiene eliminando le tre quantità l_1, m_1, n_1 fra le tre equazioni (48.) e la prima delle (8).

Ponendo per un istante

$$h = \rho_1 \varpi, \qquad k = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \rho_1^2 \varpi^2}$$

si ottiene dalle (48), mediante le formole del Sig. Serret,

$$l'_1 = \varkappa\alpha_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\alpha_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\alpha_3,$$

$$m'_1 = \varkappa\beta_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\beta_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\beta_3,$$

$$n'_1 = \varkappa\gamma_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\gamma_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\gamma_3,$$

da cui, quadrando e sommando,

$$\varepsilon'^2 = \varkappa^2 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)^2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)^2.$$

Ponendo

$$P = h' + \frac{k}{r_1} = \left(\rho_1 \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho}\right)' + \frac{\operatorname{sen}\theta \sqrt{1 - \rho_1^2\left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2}}{r_1},$$

questa formola può scriversi nel modo che segue (*)

$$52.\qquad \left(P+\frac{\cos\theta}{\rho_1}\right)^2+\frac{\left(\theta'\cos\theta-P\rho_1\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2}{1-\rho_1^2\left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2}+\varkappa^2=\varepsilon'^2 .$$

e costituisce una relazione fra le quattro quantità

$$u\,,\quad \rho_1\,,\quad r_1\,,\quad \frac{d\rho_1}{du},$$

che si mantiene sempre la stessa, qualunque sia la trasformazione operata sulla superficie rigata (purchè tale da conservar rettilinee le sue generatrici primitive). In altre parole, essa è un' equazione differenziale che appartiene a tutte le curve in cui può trasformarsi la direttrice della superficie rigata.

Così per esempio, quando la direttrice è una linea geodetica, si ha

$$\frac{\cos\omega}{\rho}=0,\qquad P=\frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1},\qquad \varkappa=-\theta'\operatorname{sen}\theta\,,$$

e la formola precedente si riduce a quest' altra semplicissima:

$$53.\qquad \frac{\cos\theta}{\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1}=\sqrt{\varepsilon'^2-\theta'^2},$$

che ha la stessa forma della (16.) §. 2°, come manifestamente doveva essere. Ponendo $\frac{1}{r_1}=0$, quest' ultima formola si riduce a quella che dà il valore di ρ_1 nella applicazione 2ª, §. 5°.

Se invece la direttrice fosse una trajettoria ortogonale delle generatrici, si avrebbe

$$\frac{\cos\omega}{\rho}=-\varkappa\,,\qquad \theta'=0\,,\qquad \cos\theta=0,$$

e la (52.) darebbe:

$$54.\qquad \frac{1}{r_1}-\frac{(\rho_1\varkappa)'}{\sqrt{1-\rho_1^2\varkappa^2}}=\sqrt{\varepsilon'^2-\varkappa^2},$$

(*) Questa trasformazione esclude solamente il caso, verificatosi nel §. 3°, in cui si abbia $\frac{1}{\rho_1}=\frac{\cos\omega}{\rho}$. In tale ipotesi però s' avrebbe nella formola precedente $h=\operatorname{sen}\theta$, $k=0$, e se ne ricaverebbe subito il valore di r_1 dato dall' equazione (19) del §. 3°.

equazione dalla quale, facendo $\frac{1}{r_1}=0$, si ricava per ρ_1 il medesimo valore ottenuto con altro metodo nell' applicazione 1ª, §. 5º

Se la direttrice è la linea di stringimento si ha

$$x=0\,,\qquad \frac{\cos\omega}{\rho}=-\theta',$$

e la (52.) riducesi facilmente alla seguente:

$$55.\qquad \frac{\cos\theta-\rho_1(\rho_1\theta'\operatorname{sen}\theta)'}{\rho_1\sqrt{1-\rho_1^2\theta'^2}}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1}=\varepsilon'.$$

Le formole precedenti possono servire a determinare una delle quantità ρ_1, r_1 quando l' altra è data, o determinata da certe condizioni.

Così nel §. 4º, applicazione 2ª, abbiamo trovato il valore

$$\rho_1=\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2\theta'^2}},$$

dipendentemente dalle relazioni

$$\theta=\frac{\pi}{2},\qquad x=-\frac{1}{\rho},\qquad \sqrt{\varepsilon^2-x^2}=\frac{1}{r}.$$

Applicando la formola (54) si trova

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}+\frac{(\rho\theta')'}{1+\rho^2\theta'^2},$$

valore che avrebbesi potuto dedurre, meno prontamente, dalle formole del §. citato.

La formola (32) del §. 6º fornisce il valore di ρ_1 relativo ad una linea geodetica trasformata in elica cilindrica. Sostituendo nella (53) questo valore si ha

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{\cos\mu_1\sqrt{\varepsilon^2-\theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1-\theta)},$$

formola che combinata colla predetta riproduce la nota proprietà delle eliche cilindriche.

Noteremo finalmente che eliminando r_1 fra l' equazione (52) e la

$$\rho_1^2+r_1^2\rho_1'^2=g^2,$$

che caratterizza le linee tracciate sopra una sfera di raggio g, si otterrebbe un' equazione differenziale del 1º ordine fra ρ_1 ed u, l' integrazione della quale farebbe conoscere la trasformata sferica della direttrice primitiva.

Pisa, Maggio 1865.

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA

RELATIVO ALLA TEORIA

DELLE SUPERFICIE GOBBE

DEL PROF. E. BELTRAMI.



Le recenti ricerche del sig. DINI intorno alla quistione di sapere se, fra le superficie definite da certe relazioni particolari fra i due raggi di curvatura principali, esistano superficie gobbe, mi hanno dato occasione di trattare questo argomento col metodo adoperato nella precedente mia Memoria sulle superficie rigate.

Per tal uopo ho trovato acconcio anzi tutto di cambiare l'enunciato del problema e di concepirlo nel modo più generale possibile. La quistione che io risolvo nel presente scritto può infatti formularsi nel modo seguente:

Trovare tutte le superficie gobbe i cui raggi principali di curvatura hanno fra loro in ciascun punto una relazione costante, non data a priori.

In tutto ciò che segue intendo escluse espressamente le superficie rigate sviluppabili, siccome quelle alle quali la proposta quistione, nel suo senso proprio, non può essere applicata.

Poniamo, come nella Memoria precitata,

$$x = \xi + vl,$$
$$y = \eta + vm,$$
$$z = \zeta + vn;$$

ed indichiamo, come ha fatto GAUSS, con A, B, C i tre binomj

$$\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}, \quad \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \quad \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

Rammentando che ξ, η, ζ, l, m, n sono funzioni della sola u, si trova facilmente:

$$A = \eta'n - \zeta'm - v\,(mn' - m'n),$$
$$B = \zeta'l - \xi'n - v\,(nl' - n'l),$$
$$C = \xi'm - \eta'l - v\,(lm' - l'm).$$

Indichiamo inoltre con λ, μ, ν i coseni degli angoli che la generatrice della superficie fa rispettivamente colla tangente, colla normale e colla perpendicolare al piano osculatore della direttrice nel punto pel quale passa la generatrice medesima. Avremo le formole

$$l = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 ,$$

$$m = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 ,$$

$$n = \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 ,$$

dalle quali, facendo uso delle formole di Serret, e ponendo

(1) $$\lambda_1 = \lambda' - \frac{\mu}{\rho} , \quad \mu_1 = \mu' + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\nu}{r} , \quad \nu_1 = \nu' - \frac{\mu}{r}$$

(cosicchè

(2) $$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0) ,$$

si deduce, colla derivazione rispetto ad u,

$$l' = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3 ,$$

$$m' = \lambda_1 b_1 + \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3 ,$$

$$n' = \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3 .$$

Da queste formole si trae

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = \cos\theta = \lambda ,$$

$$l'a_1 + m'b_1 + n'c_1 = \lambda_1 = \lambda' - \frac{\mu}{\rho} ,$$

e quindi

$$\lambda_1 = -\left(\theta' \operatorname{sen}\theta + \frac{\mu}{\rho}\right) .$$

Se dunque assumiamo come direttrice la linea di stringimento, per la quale si ha, come è noto,

$$l'a_1 + m'b_1 + n'c_1 = 0$$

otteniamo per λ, μ, ν i valori seguenti:

(3) $$\begin{cases} \lambda = \cos\theta , \\ \mu = -\rho\theta' \operatorname{sen}\theta , \\ \nu = \operatorname{sen}\theta \sqrt{1 - \rho^2\theta'^2} , \end{cases}$$

che potrebbersi anche dedurre da formole date nella citata Memoria.

Per essere $\lambda_1 = 0$, la formola (2) si riduce alla

$$(4) \qquad \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0,$$

e per la stessa ragione si ha semplicemente

$$l' = \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3,$$

$$m' = \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3,$$

$$n' = \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3.$$

Da queste espressioni, ponendo di nuovo

$$(5) \qquad \lambda_2 = -\frac{\mu_1}{\rho}, \qquad \mu_2 = \mu'_1 + \frac{\nu_1}{r}, \qquad \nu_2 = \nu'_1 - \frac{\mu_1}{r},$$

si deduce con una seconda derivazione

$$l'' = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2 + \nu_2 a_3,$$

$$m'' = \lambda_2 b_1 + \mu_2 b_2 + \nu_2 b_3,$$

$$n'' = \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 + \nu_2 c_3.$$

Coll' aiuto delle formole precedenti si trova facilmente:

$$mn' - m'n = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, a_1 - \lambda\nu_1 a_2 + \lambda\mu_1 a_3,$$

$$nl' - n'l = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, b_1 - \lambda\nu_1 b_2 + \lambda\mu_1 b_3,$$

$$lm' - l'm = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, c_1 - \lambda\nu_1 c_2 + \lambda\mu_1 c_3;$$

$$b_1 n - c_1 m = -\nu a_2 + \mu a_3,$$

$$c_1 l - a_1 n = -\nu b_2 + \mu b_3,$$

$$a_1 m - b_1 l = -\nu c_2 + \mu c_3,$$

e quindi, sostituendo nei valori di A, B, C:

$$A = -v\,(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, a_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\, a_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\, a_3,$$

$$B = -v\,(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, b_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\, b_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\, b_3,$$

$$C = -v\,(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, c_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\, c_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\, c_3.$$

Si trova pure:

$$\frac{d^2x}{du^2} = v\lambda_2 a_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) a_2 + v\nu_2 a_3 ,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = v\lambda_2 b_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) b_2 + v\nu_2 b_3 ,$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = v\lambda_2 c_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) c_2 + v\nu_2 c_3 ;$$

$$\frac{d^2x}{dudv} = \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3 ,$$

$$\frac{d^2y}{dudv} = \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3 ,$$

$$\frac{d^2z}{dudv} = \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3 ,$$

$$\frac{d^2x}{dv^2} = 0 , \qquad \frac{d^2y}{dv^2} = 0 , \qquad \frac{d^2z}{dv^2} = 0.$$

Da queste varie espressioni risulta, che ponendo per brevità:

$$(6) \qquad \begin{cases} P = -\dfrac{\nu}{\rho} , \\ Q = \mu\nu_2 - \mu_2\nu + \dfrac{\lambda\nu_1}{\rho} , \\ R = \lambda(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \lambda_2(\mu\nu_1 - \mu_1\nu) , \end{cases}$$

e usando i simboli D, D', D'' nel senso delle *Disquisitiones generales,* si ha:

$$D = P + Qv - Rv^2,$$

$$D' = \mu\nu_1 - \mu_1\nu ,$$

$$D'' = 0.$$

Rammentiamo inoltre che si ha

$$E = 1 + v^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2) = 1 + v^2 \varepsilon'^2,$$

$$F = \cos\theta ,$$

$$G = 1 ,$$

$$EG - F^2 = \text{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2,$$

ed osserviamo che, per essere

$$(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2)(\mu_1^2 + \nu_1^2) - (\mu\mu_1 + \nu\nu_1)^2$$
$$= \varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad \text{per le (3) (4)},$$

si può scrivere

$$(7) \qquad D' = \mu\nu_1 - \mu_1\nu = \varepsilon' \operatorname{sen}\theta.$$

Per questi valori l'equazione generale in R dei raggi di curvatura (vedi t. IV di questi Annali p. 284)

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\left(\frac{G}{R} - \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \left(\frac{F}{R} - \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right)^2 = 0,$$

indicando con R_1, R_2 i detti due raggi, porge le due relazioni seguenti:

$$-\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2)^2},$$

$$-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{Rv^2 - Qv - P_1}{(\operatorname{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove si è posto

$$(8) \qquad P_1 = P - 2\varepsilon' \operatorname{sen}\theta \cos\theta.$$

Eliminando v fra le due equazioni precedenti si trova

$$(9) \qquad \frac{Q\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{-R_1R_2} - 1\right\}^{\frac{1}{2}} = R\left\{\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{-R_1R_2} - 1\right\}$$
$$- \frac{\varepsilon'^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{(\varepsilon' \operatorname{sen}\theta)^{\frac{3}{2}} \frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1R_2}} + P_1\right\}.$$

Siccome quest' equazione non contiene più, insieme coi due raggi principali R_1, R_2, che la variabile u, sotto le funzioni ε, θ, etc., così il nostro problema è ora ridotto a trovare le forme che devono avere queste funzioni (e quindi le $\xi, \eta, \zeta, l, m, n$), affinchè dall' equazione medesima sparisca identicamente la variabile u. Ora poichè in luogo delle due quantità R_1, R_2 è lecito introdurre due qualunque loro funzioni indipendenti, così poniamo per un momento

$$\sqrt{-R_1R_2} = X, \qquad \frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1R_2}} = Y,$$

e consideriamo le X, Y come variabili principali in luogo delle R_1, R_2. Ponendo di nuovo, per brevità,

$$\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta} = h, \qquad \varepsilon' \operatorname{sen}\theta = k, \qquad R + h^2 P_1 = R',$$

ed innalzando al quadrato i due membri dell'equazione (9) si trova, dopo aver diviso per $h^4 k^3$,

$$\left(\frac{Q^2}{hk^3} + \frac{2RR'}{h^3k^3}\right) X = \frac{R^2}{h^2k^3} X^2 - 2\frac{R}{hk^{\frac{3}{2}}} XY + \left(Y + \frac{R'}{h^2k^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \frac{Q^2}{h^2k^3}.$$

Notiamo bene che la quantità h^4k^3, ossia $\frac{\varepsilon'^7}{\operatorname{sen}\theta}$, non può essere mai nè nulla nè infinita. Infatti θ si annulla soltanto sulle superficie sviluppabili, ed ε', più in particolare ancora, sulle sole superficie cilindriche, due casi che abbiamo escluso fino dal principio. Dunque le conclusioni che dedurremo dalla precedente trasformazione dell'equazione primitiva non possono andar soggette ad alcuna eccezione, finchè si tratti di superficie gobbe.

Ora siccome nell'equazione precedente si è isolato il quadrato di Y, così l'equazione stessa può risultare indipendente dalla variabile u solamente quando, per la natura delle funzioni che entrano nella composizione dei suoi coefficienti, questi stessi coefficienti risultano costanti, cioè quando, indicando con a, b, c, d quattro costanti indeterminate, si ha:

$$\frac{R}{hk^{\frac{3}{2}}} = a, \qquad \frac{Q}{hk^{\frac{3}{2}}} = b, \qquad \frac{R'}{h^2k^{\frac{3}{2}}} = c,$$

$$\frac{Q^2}{hk^3} + \frac{2RR'}{h^3k^3} = d.$$

Ora dall'ultima di queste relazioni, in virtù delle prime tre, si deduce

$$h = \frac{d - 2ac}{b^2},$$

dunque la quantità h, ossia $\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}$, deve essere costante.

(Questa deduzione cessa d'essere rigorosa nel caso in cui b sia nullo, cioè nel caso in cui si abbia nella (9) $Q = 0$. Ma, facendo uso di alcune trasformazioni che vedremo fra un momento, si trova facilmente che se h è variabile con u, si ha sempre

$$Q = h' \operatorname{sen}^2\theta.$$

Dunque, poichè θ non può essere nullo, se Q è zero dev' esser tale anche h', e quindi h dev' essere costante. Del resto da quest' ultima formola emerge che Q è appunto nullo in ogni caso: ma noi non faremo ora uso di questa conclusione, che non è per anche dimostrata.)

Si ha poscia

$$\varepsilon' = h \operatorname{sen} \theta , \qquad k = h \operatorname{sen}^2\theta ,$$

$$R = ah^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}^3\theta , \qquad Q = bh^{\frac{5}{2}} \operatorname{sen}^3\theta , \qquad R' = ch^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}^3\theta ,$$

$$P_1 = h^{\frac{1}{2}} (ch - b) \operatorname{sen}^3\theta ,$$

o più semplicemente, mutando le costanti e ricordando la (8),

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{c} Q = a \operatorname{sen}^3\theta , \qquad R = b \operatorname{sen}^3\theta , \qquad P_1 = c \operatorname{sen}^3\theta , \\ P = \operatorname{sen}^2\theta \, (c \operatorname{sen} \theta + 2h \cos \theta). \end{array} \right.$$

Lo stesso valore $\varepsilon' = h \operatorname{sen} \theta$, sostituito nella (7), dà

$$\mu\nu_1 - \mu_1\nu = h \operatorname{sen}^2\theta ,$$

e quest' equazione combinata colla (4), osservando che $\mu^2 + \nu^2 = \operatorname{sen}^2\theta$, porge

$$(11) \qquad \mu_1 = -h\nu , \qquad \nu_1 = h\mu.$$

Sostituendo questi valori nelle (5) si trova

$$\lambda_2 = \frac{h\nu}{\rho} , \qquad \mu_2 = h\left(-\nu' + \frac{\mu}{r}\right) , \qquad \nu_2 = h\left(\mu' + \frac{\nu}{r}\right).$$

Ma dalle (1) si ha pure, per le stesse (11),

$$\mu' + \frac{\nu}{r} = -\left(h\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right) , \qquad \nu' = \frac{\mu}{r} = h\mu ,$$

quindi possiamo scrivere

$$(12) \qquad \lambda_2 = \frac{h\nu}{\rho} , \qquad \mu_2 = -h^2\mu , \qquad \nu_2 = -h\left(h\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right).$$

Così abbiamo i valori di μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, espressi per le sole quantità λ, μ, ν, ρ.

Da essi si deduce

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = h^2\left(h \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\lambda\nu}{\rho}\right),$$

$$\mu\nu_2 - \mu_2\nu = -h\frac{\lambda\mu}{\rho},$$

quindi (6):

$$(13)\quad \begin{cases} R = h^2 \operatorname{sen}\theta\left(h \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \dfrac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}\right), \\ Q = 0, \\ P = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}. \end{cases}$$

(Se h non fosse costante, i valori (11) rimarrebbero esatti egualmente, ma quelli di μ_2 e ν_2 (12) dovrebbero essere accresciuti rispettivamente di $-h'\nu$ e di $+h'\mu$, e la loro sostituzione nel valore di Q darebbe per risultato $Q = h' \operatorname{sen}^2\theta$, come si è detto pocanzi.)

Di ciascuna delle quantità P, R abbiamo ora due valori: i precedenti, cioè, e quelli dati dalle (10). Eguagliandoli si trova:

$$-\frac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho} = \operatorname{sen}\theta\,(c \operatorname{sen}\theta + 2h\cos\theta),$$

$$b \operatorname{sen}^2\theta = h^2\left(h \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}\right),$$

ed eliminando $\dfrac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}$ si ottiene:

$$(b + ch^2)\operatorname{sen}\theta + h^3\cos\theta = 0.$$

Ora affinchè quest'equazione fosse identica per ogni valore di θ, bisognerebbe che si avesse $h = 0$, $b = 0$. Ma h non può essere zero, perchè tale non può essere ε', dunque bisogna che θ sia costante, epperò, per un noto teorema di Bonnet, che la linea di stringimento sia anche linea geodetica della superficie. Si giungerebbe allo stesso risultato quando, volendosi supporre $\rho = \pm\dfrac{1}{\theta'}$, si rendesse impossibile la precedente eliminazione.

Dovendo essere costante l'angolo θ, l'una o l'altra delle due precedenti equazioni dà: $\rho =$ costante.

Avendo stabilito in tal modo che $\theta' = 0$ e che quindi $\epsilon' =$ cost., $\rho =$ cost., è facilissimo completare la determinazione della classe di superficie gobbe della quale ci occupiamo. Si ha infatti dalle (3) (11) (12).

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \mu_1 = -h\operatorname{sen}\theta, \qquad \nu_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{\rho}, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \nu_2 = -h\left(h\operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\theta}{\rho}\right).$$

Confrontando il valore di μ_1 qui ottenuto con quello dato dalle (1) si trova

$$(14) \qquad \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = -h\operatorname{sen}\theta,$$

e poichè in questa equazione θ e ρ sono costanti, è necessario che anche r sia costante: bisogna quindi, per un teorema di PUISEUX, che la direttrice sia un'elica tracciata sopra un cilindro di rivoluzione, donde consegue essere la superficie un elicoide rigato avente quest'elica per linea di stringimento.

Ora daremo all'equazione (9) la sua forma finale. Si ha dalle (8) (13)

$$P_1 = -\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\rho} + 2h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right),$$

$$Q = 0,$$

$$R = h^2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\rho} + h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right),$$

epperò l'equazione anzidetta si trasforma nella seguente:

$$\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\rho} + h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\left(h\sqrt{-R_1R_2} - 1\right)$$

$$- h^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}^3\theta\frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1R_2}} + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\rho} + 2h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) = 0,$$

ossia, dopo qualche riduzione:

$$0 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{h}\frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1R_2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{1}{\rho} + h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\sqrt{-R_1R_2} - \cos\theta.$$

Si può eliminare la costante h introducendo le sole quantità ρ, r, θ, che sono più direttamente connesse colla natura della superficie. Abbiamo infatti la formola (14) che ci permette di fare questa eliminazione, compiuta la quale si trova finalmente:

$$(15) \qquad \frac{R_1+R_2}{\sqrt{-R_1R_2}}\sqrt{-\left(\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\operatorname{sen}\theta} + \left(\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)\sqrt{-R_1R_2}-\cos\theta=0.$$

Il risultato finale della nostra investigazione è contenuto, quanto alla determinazione della superficie cercata, nelle equazioni

$$\theta = \text{cost.}, \qquad \mu = 0, \qquad \rho = \text{cost.}, \qquad r = \text{cost.}$$

le quali, riassumendo il già detto, esprimono che: *le sole superficie gobbe fra i cui raggi principali di curvatura sussiste in ogni punto una relazione costante, sono gli elicoidi.*

Reciprocamente: *tutti gli elicoidi rigati posseggono questa proprietà* (*); e la relazione costante che si verifica per questi elicoidi è rappresentata dall'equazione (15).

È chiaro poi che nulla impedisce di supporre $\frac{1}{\rho}=0$, cioè di supporre che l'elica di stringimento sia una retta. In questo caso la quantità r che, per la sua definizione, resterebbe indeterminata, deve ricevere un valore costante, che può scegliersi comunque: ciò emerge dalla formola (14).

Non faremo che due applicazioni della formola (15).

1°) Meunier ha dimostrato pel primo che esiste una sola superficie rigata d'area minima, cioè soddisfacente alla relazione

$$R_1 + R_2 = 0,$$

ed è l'elicoide a piano direttore ed a direttrice rettilinea. Questo teorema è una conseguenza immediata della nostra formola: infatti, se ha luogo la precedente relazione in ogni punto della superficie, si deve avere

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}-\frac{\cos\theta}{r}=0, \qquad \cos\theta=0,$$

(*) È anzi evidente che *in qualunque superficie elicoidale* si verifica la proprietà che *uno dei raggi di curvatura è funzione dell'altro.*

cioè

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{\rho} = 0,$$

equazioni che caratterizzano appunto l'elicoide testè menzionato.

2°) Quando si suppone $\frac{1}{r} = 0$, l'elica di stringimento diventa una circonferenza e la superficie una superficie di rivoluzione. In questo caso l'equazione (15) diventa, ponendovi $\rho = -a$,

$$(R_1 + R_2)\sqrt{a \operatorname{sen}\theta \cos\theta} + (-R_1R_2)^{\frac{3}{4}} \operatorname{sen}\theta - a(-R_1R_2)^{\frac{1}{4}} \cos\theta = 0,$$

e si decompone in due fattori nel modo seguente:

$$\left\{ R_1^{\frac{3}{4}} \sqrt{\operatorname{sen}\theta} - (-R_2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{a\cos\theta} \right\} \left\{ R_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{a\cos\theta} + (-R_2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\operatorname{sen}\theta} \right\} = 0,$$

donde emerge la sussistenza dell'una o dell'altra di queste due relazioni:

$$-\frac{R_1^3}{R_2} = (a \cot\theta)^2, \qquad -\frac{R_2^3}{R_1} = (a \cot\theta)^2,$$

le quali concordano nell'esprimere la notissima proprietà delle superficie di rivoluzione del 2° ordine, d'avere uno dei raggi principali costantemente proporzionale al cubo dell'altro.

Si potrebbe, in alcuni casi, trovar preferibile di introdurre nell'equazione (15), in luogo dei raggi di 1ª e 2ª curvatura ρ ed r, il raggio a della base del cilindro sul quale è tracciata l'elica di stringimento e l'angolo ω che quest'elica fa colle generatrici del cilindro stesso. Facendo uso di relazioni note si trova facilmente che l'equazione (15) viene allora a trasformarsi nella seguente:

$$\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{-R_1R_2}} \sqrt{a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}(\omega - \theta)} + \operatorname{sen}\omega \cos(\omega - \theta)\sqrt{-R_1R_2}$$

$$- a\cos\theta = 0.$$

Ma sotto questa forma essa non si presta più ai casi in cui $a = 0$, cioè agli elicoidi rigati a direttrice rettilinea.

Pisa, Dicembre 1865.



P. S. *Nell'intervallo di tempo che corse fra la consegna della presente Nota alla Redazione degli Annali e la sua pubblicazione, il Sig.* Dini *è pervenuto dal canto suo ai medesimi risultati. Mi sono creduto in debito di far conoscere questa circostanza, esternando in pari tempo il desiderio che il Sig.* Dini *pubblichi la sua dimostrazione, che è intieramente diversa da quella che precede. Il confronto dei due metodi non può che recare maggior luce sopra un soggetto non privo d'interesse.*



INTORNO AD ALCUNE SOMME DI CUBI

NOTA

DI ANGELO GENOCCHI

Professore di Matematica nella Regia Università di Torino.

1.° Si conoscono parecchie soluzioni, con numeri interi e positivi, dell'equazione

$$(1) \qquad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 = y^3 ,$$

e da esse infinite altre se ne possono dedurre moltiplicando per un medesimo fattore i valori già trovati di x, r, e y. Queste saranno soluzioni *derivate*: cercheremo altre soluzioni *primitive* nel modo seguente. Posto $x+r=2s$, $y=6t$, risulta

$$(2) \qquad s(r^2+8s^2)=9t^3,$$

e per risolver questa si pone

$$s=9t'^3, \qquad r+s\sqrt{-8}=(p+q\sqrt{-8})^3 ,$$

donde si trae

$$r=p\,(p^2-24q^2), \qquad s=q\,(3p^2-8q^2),$$

e però

$$t'^3=s'(p^2-24s'^2), \qquad \text{fatto} \qquad q=3s'.$$

Si pone indi

$$s'=27t''^3, \qquad p+s'\sqrt{24}=(r'+s''\sqrt{24})^3 ,$$

onde

$$p=r'\,(r'^2+72s''^2), \qquad s'=3s''\,(r'^2+8s''^2),$$

ossia

$$s''(r'^2 + 8s''^2) = 9t''^3 ,$$

equazione simile alla (2), che risolvendosi cogli stessi numeri può servire a trovarne successivamente quante soluzioni si vogliano.

Si prenda la soluzione $r' = s'' = t'' = 1$: ne dedurremo

$$s' = 27t''^3 = 27 , \qquad q = 3s' = 81 , \qquad p = r'(r'^2 + 72\, s''^2) = 73 ,$$

$$r = p\,(p^2 - 24q^2) = 73\,(73^2 - 24.81^2) = -73.152135 ,$$

$$s = q\,(3p^2 - 8q^2) = 81(3.73^2 - 8.81^2) = - 81.36501,$$

e quindi $r = -11105855$ e $x = 4s - r = -720469$. Cambiando il segno, avremo i valori interi e positivi

$$x = 720469 , \qquad r = 11105855,$$

che soddisfaranno all'equazione (1) con y pure intero e positivo.

2.° Si può applicare lo stesso metodo all'equazione

$$(3) \qquad x^3 + (x + r)^3 + (x + 2\,r)^3 + \ldots + (x + nr - r)^3 = y^3,$$

supponendo $n > 3$. Fatto $s = 2x + (n - 1)r$, questa equazione diventa, secondo una formola del signor Le Besgue,

$$(4) \qquad ns[s^2 + (n^2 - 1)r^2] = 8y^3 ;$$

per ciò nel caso di $n = 4$ si ha

$$(5) \qquad s(s^2 + 15r^2) = 2y^3 ,$$

e posto

$$s = 2s'^3 , \qquad s + r\sqrt{-15} = (p + q\,\sqrt{-15})^3 ,$$

ne risulta

$$2s'^3 = p(p^2 - 45q^2) , \qquad r = 3q(p^2 - 5q^2) ;$$

indi posto

$$p = 2y'^3 , \qquad p + 3q\sqrt{5} = (s'' + r'\sqrt{5})^3 ,$$

si ottiene

$$3q = r'(3\,s''^2 + 5r'^2) , \qquad s''(s''^2 + 15r'^2) = 2y'^3 ,$$

la qual ultima equazione è simile alla (5).

Preso $r' = 1$, $s'' = 25$, $y' = 20$, i quali valori corrispondono alla eguaglianza

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3 ,$$

si troverà

$$p = 2y'^3 = 2.20^3\ , \quad s' = y'\,(s''^2 - 5r'^2) = 20.620 = 20^2.31\ ,$$

$$s = 2s'^3 = 2.20^6.31^3\ , \qquad q = \frac{r'}{3}\,(3s''^2 + 5r'^2) = \frac{1880}{3} = 20.\frac{94}{3}\ ,$$

$$r = 3q(p^2 - 5q^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}\,(20^3.4.9 - 47^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}.283791\ .$$

Si possono moltiplicare per 9 e dividere per 2.20^4 i valori di r e s riducendoli così a

$$r = 47.285791 = 13432177\ ,$$

$$s = 9.20^2.31^3 = 107247600\ ,$$

donde

$$x = \frac{s - 3r}{2} = \frac{66951069}{2}\ .$$

Si avrà dunque, moltiplicando per 2 questi valori di x e r, una nuova soluzione dell'equazione (3), per $n = 4$, con numeri interi e positivi

$$x = 66951069\ , \qquad r = 26864354.$$

3.° Generalmente, per soddisfare all'equazione (4), fatto per compendio $n^2 - 1 = m$, poniamo

$$s = n^2 s'^3, \qquad s + r\sqrt{-m} = (p + q\sqrt{-m})^3\ ,$$

donde

$$r = q(3p^2 - mq^2)\ , \qquad n^2 s'^3 = p(p^2 - 3mq^2)\ ;$$

poniamo inoltre

$$np = 8y'^3\ , \qquad p + q\sqrt{3m} = (s'' + r'\sqrt{3m})^3\ ,$$

donde

$$q = 3r'(s''^2 + m\,r'^2)\ , \qquad p = s''(s''^2 + 9mr'^2)\ ,$$

sicchè facendo $3r' = r''$ si ha l'equazione simile alla (4)

$$ns''[s''^2 + (n^2 - 1)\,r''^2] = 8y'^3.$$

Così, data una soluzione della (4), i medesimi numeri potranno prendersi pei valori di r'', s'' e y', e da questi si dedurranno r', p, q, r, s, onde si avrà una nuova soluzione della (4), che potrà similmente somministrarne un'altra, ecc. ecc. Ma è chiaro che le soluzioni ottenute in tal modo potranno non essere le sole possibili; di più, sebbene si trovino valori positivi per s ed r, può darsi che x risulti negativo e quindi non si abbia per l'equazione (3) una soluzione con numeri positivi quantunque si abbia per la (4).

Preso $r''=s''=1$, $y'=\frac{n}{2}$, ne risulterà

$$r'=\frac{1}{3}, \quad p=n^2, \quad q=\frac{n^2+8}{9}, \qquad r=n^4.\frac{n^2+8}{3}-(n^2-1)\left(\frac{n^2+8}{9}\right)^3,$$

$$s=n^6-n^2(n^2-1)\frac{(n^2+8)^2}{27}:$$

questi valori di r e s sono ambedue negativi quando n è maggiore di 16, da $n=3$ ad $n=7$ è positivo r, negativo s, ma in ambedue i casi si ha $s<(n-1)r$, prescindendo dai segni, e però nel primo membro dell'equazione (3) alcuni cubi saranno positivi, altri negativi. Da $n=8$ fino ad $n=16$ sarà s negativo, r positivo, ma in valor assoluto sarà $s>(n-1)r$, quindi x sarà negativo e saranno negativi tutti gl' indicati cubi, onde un semplice cambiamento di segni renderà positivi tutti i termini del primo membro dell'equazione (3).

4.° Si possono trovare altre formole più commode per dedurre da una soluzione dell'equazione (4) una nuova soluzione.

Sia una soluzione $s=f$, $r=g$, $2y=h$, e ritenendo il medesimo valore di s, si supponga

$$r=g+z, \qquad 2y=h+pz:$$

sostituendo, togliendo i termini che si annullano per la (4), e dividendo poscia per z, avremo

$$mnf(2g+z)=3h^2p+3hp^2z+p^3z^2,$$

ove $m=n^2-1$; indi ponendo $p=\frac{2mnfg}{3h^2}$, ne trarremo

$$z=\frac{mnf-3hp^2}{p^3},$$

e per ciò una soluzione della (4) sarà eziandio

$$s=f, \quad r=g+\frac{mnf-3hp^2}{p^3}, \quad 2y=\frac{mnf-2hp^3}{p^2}.$$

Messo il valore di p, messo per h^3 il valore

$$h^3=nf(f^2+mg^2)$$

che risulta dalla (4), e fatto

(6) $\quad f'=8m^2fg^3, \quad g'=27f^4+18mf^2g^2-m^2g^4, \quad h'=2mgh(9f^2+mg^2),$

si troverà

$$s=\frac{f'}{8m^2g^3}, \quad r=\frac{g'}{8m^2g^3}, \quad 2y=\frac{h'}{8m^2g^3};$$

onde è chiaro che l'equazione (4) sarà soddisfatta anche dai valori $s=f'$, $r=g'$, $2y=h'$ che sono dati dalle (6) e che saranno interi se sono interi f, g, h.

Preso $f=g=1$, $h=n$, le formole (6) daranno

$$f'=8m^2, \qquad g'=27+18m-m^2, \qquad h'=2mn(m+9):$$

il valore di g' sarà positivo per $n=3$ e $n=4$, negativo per $n>4$, e quindi per $n>4$ si cambierà g' in $-g'$, ma da $n=3$ sino ad $n=11$ si avrà in valor assoluto $f'>(n-1)g'$, cosicchè ne risulteranno soluzioni dell'equazione (3) con valori interi e positivi di r, x, e y. A cagion d'esempio per $n=6$ si ha $f'=8.35^2$, $g'=8.71$, e tolto il fattor comune 8, risulta

$$x=\frac{35^2-5.71}{2}=435, \qquad r=71.$$

Si può anche fare $a=\frac{mg^2}{f^2}$, $a'=\frac{mg'^2}{f'^2}$, donde

$$(7) \qquad a'=\frac{1}{64a^3}(27+18a-a^2)^2;$$

e se risulterà $a'<1$, sarà $f'^2>mg'^2>(n-1)^2g'^2$, e quindi $f'>(n-1)g'$, onde si avrà ancora una soluzione dell'equazione (3) con numeri interi e positivi. Si potranno similmente calcolare altre quantità a'', a''', . . . che dipendano da a', a'', . . . come a' dipende da a, e quando si giunga ad una di tali quantità che sia <1, si avrà una soluzione della stessa equazione (3) con numeri interi e positivi.

5.° È da notarsi che anche per valori di n grandi quanto si voglia si può soddisfare alla (3) con x intero e positivo, y razionale, *supponendo* $r=1$: basta prendere per n un cubo non divisibile per 3. Ciò risulta dalle formole con cui il signor Camillo Pagliani, cadetto nel R. Corpo dei Pionieri di Modena, sciolse il problema di *trovare mille cubi interi consecutivi la cui somma sia un cubo* (*). Imperocchè cambiando n in n^3 e facendo

$$x=\frac{(n^2-1)^2-3(n^3+1)}{6},$$

si trova

$$(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+n^3)^3=\left(nx+\frac{n^3(n+1)}{2}\right)^3;$$

e si vede che il numeratore del valore di x è sempre un numero pari ed è anche divisibile per 3 quando non è tale n, essendo allora n^2-1 divisibile per 3, onde in questo caso sarà x un numero intero. Se si prende n divisibile per 3, sarà un numero intero $3x$, e moltiplicando l'equazion precedente per 3^3, si avrà eguale ad un cubo la somma dei cubi di n^3 numeri interi formanti una progressione aritmetica la cui ragione sarà 3.

(*) V. *Annales de Mathématiques par Gergonne*, tom. XX, p. 382—384.

6.° Se si domanda che la somma dei termini d'una progressione aritmetica elevati a cubo non sia un cubo ma un quadrato, si avrà invece dell'equazione (2) la seguente

$$(8)\qquad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2$$

che potrà ridursi alla

$$(9)\qquad ns\left[s^2 + (n^2-1)\,r^2\right] = 8y^2.$$

Facendo $2y = nst$, trarremo da questa

$$s^2 + (n^2-1)r^2 = 2nst^2,$$

donde $s = nt^2 \pm \sqrt{n^2t^4 - (n^2-1)\,r^2}$: quindi porremo

$$n^2t^4 - (n^2-1)r^2 = (nt^2 - rp)^2,$$

e otterremo

$$(10)\qquad r = \frac{2npt^2}{n^2-1+p^2}$$

a cui corrisponderanno due valori di s

$$(11)\qquad s = \frac{2n(n^2-1)t^2}{n^2-1+p^2}, \qquad s = \frac{2np^2t^2}{n^2-1+p^2}.$$

Assegnando valori razionali quali si vogliano a p e t si avranno dunque valori razionali per r, s ed y, e così le formole (10) e (11) daranno la soluzione generale dell'equazione (9) con numeri razionali.

I due valori (11) si possono anche ridurre ad un solo, poichè il secondo diventa identico al primo se vi si cambia p in $\frac{n^2-1}{p}$, mentre con questo cambiamento non si cambia r. Dal primo si dedurrà

$$(12)\qquad x = \frac{n(n-1)(n+1-p)t^2}{n^2-1+p^2},$$

formola che unita alla (10) porgerà la soluzione generale dell'equazione (8) con numeri razionali.

Se prendiamo $t=1$, $p=n-1$, troviamo $r=1$, $x=1$ la qual soluzione è notissima. Preso $p = \frac{n^2-1}{n}$, si avrà

$$r = \frac{2n^2t^2}{2n^2-1}, \qquad x = \frac{n^2t^2}{2n^2-1},$$

laonde sarà $x=1$, $r=2$, se pongasi

$$(13)\qquad 2n^2 - 1 = n^2t^4,$$

cioè $2n^2 - 1$ quadrato, il che corrisponde pure ad una soluzione nota. I valori di n che soddisfanno all'equazione (13) sono compresi nella formola

$$(14)\qquad n = \frac{(\sqrt{2}+1)^i + (\sqrt{2}-1)^i}{2\sqrt{2}},$$

dove i denota un numero impari positivo.

7.° Gli antichi aritmetici hanno osservato che i numeri $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $s = 6$ verificano nel medesimo tempo le tre equazioni

$$(15)\qquad xy = 2s, \qquad x^2 + y^2 = z^2, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = s^3:$$

si può dimostrare che fra i numeri interi sono i soli i quali godano di questa proprietà.

Imperocchè la soluzione più generale della seconda delle (15) con numeri interi è

$$x = m(a^2 - b^2), \quad y = 2mab, \quad z = m(a^2 + b^2),$$

se m, a, b siano numeri interi de' quali gli ultimi a e b si possono supporre primi tra loro; quindi la prima delle (15) darà

$$s = m^2ab(a^2 - b^2),$$

e sostituendo tutto nella terza si avrà

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^3ab^3(a^2 - b^2)^3.$$

Segue da questa equazione che $\frac{2a^4}{b^2}$ deve essere un numero intero, e supponendosi b primo ad a, sarà b^2 divisore di 2, e però $b = 1$. Adunque

$$2(a^4 + 3 + 4a) = m^3a(a^2 - 1)^3,$$

ossia, dividendo per $a + 1$,

$$2(a - 1)^2 + 4 = m^3a(a^2 - 1)(a - 1)^2;$$

onde 4 divisibile per $(a - 1)^2$, 2 divisibile per $a - 1$, e così $a - 1 = 2$, ovvero $a - 1 = 1$, il che somministra $a = 3$, ovvero $a = 2$. L'ultima equazione per $a=3$ diverrebbe

$$12 = m^3.3.8.4, \qquad \text{ossia} \qquad 1 = 8m^3,$$

il che è assurdo con m intero: resta dunque soltanto $a = 2$ che porge $1 = m^3$, $m = 1$, e quindi i valori già indicati di x, y, z, s.

In luogo della terza delle equazioni (15) si potrebbe proporre la seguente più generale

$$(16)\qquad x^3 + y^3 + z^3 = s^n t,$$

in cui t è una nuova incognita e n un esponente dato intero e > 1. Procedendo come dianzi si troverà un'equazione

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, b^n (a^2 - b^2)^n\, t$$

dalla quale si dedurrà $\frac{2a^4}{b^2}$ intero, e quindi $b = 1$, se si vuole che anche t sia intero. Si avrà poscia

$$2(a-1)^2 + 4 = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, (a-1)^n\, (a+1)^{n-2}\, t,$$

e però $\frac{4}{(a-1)^2}$ e $\frac{2}{a-1}$ interi, onde $a = 2$ oppure $a = 3$. Preso $a = 3$ si trova

$$12 = m^{2n-3} . 3^{n-3} . 4^{n-3}\, t,$$

il che per $n > 2$ somministra l'eguaglianza

$$\frac{1}{2^n} = m^{2n-3} . 3^{n-3} . 4^{n-3}\, t$$

assurda con m e t interi, e per $n = 2$ somministra $3 = mt$, e quindi $m = 1$ e $t = 3$, oppure $m = 3$ e $t = 1$. Preso $a = 2$ si ha $6 = m^{2n-3} . 2^{n-2} . 3^{n-2} t$, il che è assurdo quando $n > 3$, porge $m = t = 1$ se $n = 3$, e $mt = 6$ se $n = 2$, talchè allora si hanno per m e t i valori $2, 3; 1, 6$.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SUR

PETRUS ADSIGERIUS,

ET LES PLUS ANCIENNES OBSERVATIONS

DE LA DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.

PAR W. WENCKEBACH.

TRADUIT DE L'HOLLANDAIS PAR T. HOOIBERG (*).

Les anciens connaissaient déjà la propriété de l' aimant d' attirer le fer, et Claudien chante avec prolixité comment une Vénus aimantée a enflammé le cœur d'un Mars de fer. Les Grecs connaissaient l'effet de l' aimant à une distance; car d'après les ordres de Ptolemée Philadelphe, Dinocrate construisit le toit du temple d' Arsinoë d'aimant, afin que la statue d'Arsinoë restât suspendue dans l'air au milieu du temple, et à Alexandrie se vit le même phénomène dans le temple de Sérapis. La connaissance des anciens sur les propriétés de l' aimant se borna là, et encore cette connaissance était incomplète et injuste, étant accompagnée d'idées erronées que Pline (1) lui-même communique comme des vérités.

Mais le fait que la terre agit comme aimant, restait inconnu aux anciens, pour autant que nous sachions. Ce ne fut qu'au 12ᵉ siècle qu'on eut en Europe la notion, que l'aimant, nageant sur l'eau dans une barque, prend une certaine direction par rapport au méridien (2), et l'on s'imaginait ordinairement que cette direction correspondait exactement avec les véritables Nord et Sud; de là qu'on donnait aux extrémités de l'aimant ou de l'aiguille le nom de Pôles, et bien à celle qui indiquait le Nord celui de Pôle arctique et à l'extrémité opposée celui de Pôle antarctique.

Il n'etait pas étonnant qu'on était dans l'erreur pour ce qui regarde cette supposition, et qu'on restait à ne pas s'en apercevoir, tant qu'on ne se servit

(*) Dans un volume, in 8°., intitulé « NATUUR—EN SCHEIKUNDIG || ARCHIEF, || UITGEGEVEN || DOOR || » *G. J. MULDER.* || JAARGANG 1835. || TE *ROTTERDAM*, BIJ || P. H. VAN DEN NEUVELL. || 1836. », in 8.° (page 275ᵉ, non numérotée, lig. 6—28; pages 276ᵉ—297ᵉ, numérotées 268—289, « 5.ᵉ STUK ») on trouve le texte hollandais de cet écrit, sous le titre suivant: « OVER PETRUS ADSIGERIUS EN DE OUDSTE WAAR || » NEMINGEN VAN DE AFWIJKING DER || MAGNEETNAALD. || DOOR || W. WENCKEBACH. ». Ce titre se trouve dans les lignes 1—5 de la page 275ᵉ, non numérotée, du même volume. [B. T.]

(1) Plinius, Hist. Nat., lib. XXXVI, c. 16.

(2) Il a été beaucoup écrit sur la question si les Européens ont découvert eux-mêmes cètte propriété ou qu'ils l'ont prise de la Chine et de l'Arabie. Comparez les auteurs mentionnés par Muncke, *Handb. der Naturl.* 1829. Vol. I. p. 850—51, et Klaproth, *Lettre à M. de* Humboldt *sur l' invention de la Boussole. Paris* 1834.

du compas que sur la Méditerranée, la Baltique, ou en faisant le trajet du continent de l'Europe aux îles voisines; de plus que cette inexactitude dans l'indication du compas pouvait rester cachée par d'autres causes connues de méprise, comme par les courants d'eau, etc. Mais du moment que des marins plus hardis se hasardaient à perdre entièrement de vue les côtes qui leur étaient connues, et qu'ils s'abandonnaient entièrement à la direction de l'aiguille aimantée pour trouver leur chemin et pour trouver des pays inconnus, la variation de ce guide ne put rester plus longtemps cachée. Il était donc naturel que la découverte de la déviation de l'aiguille aimantée fût synchrone avec la découverte du nouveau monde, et que cette découverte fût un des fruits des voyages de VASCO DE GAMA ou de COLOMBO.

Ce serait au contraire bien étrange que cette propriété, dont la connaissance ne dut être acquise qu'en conséquence d'observations minutieuses, eut été connue déjà depuis des siècles. Pourtant la connaissance de la déviation de l'aiguille aimantée au 13e siècle est soutenue dans les ouvrages modernes de physique, entr'autres par HORNER dans la nouvelle édition du *Physikalisches Lexicon* de GEHLER (1). Cette assertion repose sur le contenu d'un manuscrit, qui se trouve à la bibliothèque de l'Université de Leide, et dans lequel il est dit en termes distincts, que déjà l'an 1269 on eût observé une déviation de 5°.

De ce que HORNER en dit, mon attention s'est tournée sur ce manuscrit, et j'ai jugé qu'il valait bien la peine de le vérifier attentivement et d'examiner en quoi le contenu donne droit à soutenir que la déviation de l'aiguille aimantée était un phénomène déjà connu avant l'an 1269.

Le premier qui dirigea l'attention sur ce manuscrit fut le navigateur connu THÉVENOT. Dans un *Discours sur l'art de la navigation* (2) il dit: « Cependant » j'ai trouvé, qu'elle variait de 5 degrés l'an 1269; c'est dans un manuscrit qui » m'est tombé entre les mains avec le titre: *Epistola Petri Adsigerii insuper* » *rationibus naturae magnetis.* » A quoi il fait suivre qu'on a donné au physicien anglais GULIELMUS GILBERTUS l'honneur de bien de découvertes, qui étaient déjà connues dans le 13e siècle. THÉVENOT (d'après une coutume encore très-en usage chez les Français, de ne point mentionner les sources d'où ils puisent leurs informations) ne dit pas où il a vu ce manuscrit, qui donc n'a pu tirer l'attention des physiciens (3), ou du moins n'ont ils pas été en état de l'examiner eux-mêmes.

Enfin CAVALLO en visitant la Bibliothèque de Leide trouva le manuscrit de PETRUS ADSIGERIUS, et il en fit mention aussi bien dans le supplément de son ouvrage sur le magnétisme (4), que sous l'article « Compass » dans l'*Encyclopedia* de REES.

(1) Vol. I. p. 136: à l'article *Abweichung der Magnetnadel* (Déviation de l'aiguille aimantée).

(2) *Recueil de voyages de M.* THÉVENOT, *dédié au Roi*. Paris 1681. 8.°

(3) VAN SWINDEN dit (*Mém. prés. p. des Savants*. T. VIII. p. 6, note): Je n'ai pas été à portée de consulter les mss. de Pierre Adsigerius, intitulé: « Epistola insuper rationibus naturae magnetis », dont il est fait mention par Thévenot dans la IVème partie de ses voyages, et après lui dans le *Journ. des Savans*, 1687, p. 51, Ed. in 12.° Certainement Van Swinden n'aurait pas dit cela, s'il avait su que ce ms. se trouvait à Leide.

(4) CAVALLO, Treatise on Magnetism.

En conséquence des indications de THÉVENOT et de CAVALLO, PETRUS ADSIGER est nommé dans plusieurs ouvrages postérieurs de Physique, comme le premier observateur de la déviation de l'aiguille aimantée, et l'année 1269 est indiquée (par les uns comme problématique, par les autres comme plus certaine), comme l'année dans laquelle cette découverte intéressante ait été faite. (1)

C'est à la complaisance du professeur GEEL (2) que je dus l' avantage de voir et d'examiner la lettre d'ADSIGERIUS. Elle se trouve fol. 51 à 55 d'un volume qui contient diverses pièces de ROGER BACON. Ce volume est le n.° 64 des *mss. ex bibliotheca viri illustris* ISAACI VOSSII (3). Je n'ai pu découvrir d'où ISAAC VOSSIUS, qui, comme il est connu, a séjourné longtemps en Angleterre, et qui a voyagé en France, en Italie et en Suède, a apporté ce manuscrit.

On pourrait soupçonner des pièces réunies avec la lettre dans le même volume que VOSSIUS l'ait apportée de l'Angleterre; mais je ne puis ajouter aucune probabilité de plus à ce soupçon.

L'âge n'est prouvé par aucune indication positive qui pût être trouvée dans ce volume; mais un juge compétent de mss. est d'opinion qu'il ne peut monter au delà du 15e siècle, pour autant qu'on puisse conclure de la forme des caractères, mais bien qu'il peut être d'une date moins reculée.

La lettre d'ADSIGERIUS contient deux parties: la première donne une description des données auxquelles on puisse reconnaître les qualités de l'aimant; les moyens de trouver les pointes de la pierre où se trouvent les pôles magnétiques sont indiqués; on y traite de l'attraction et de la répulsion magnétiques, et enfin on y fait mention de la propriété d'un aimant à mouvement libre, de tourner un des pôles vers le Nord et l'autre vers le Sud. Il est intéressant de rapporter les mots qui ont rapport à cette propriété.

Au chap. 7 il dit: « At notum est omnibus expertis, quod cum ferrum » magnetem tetigerit, et ligno levi vel festucae fuerit affixum, et aquae expo- » situm, una pars movebitur ad stellam, quam nauticam vocant, eo quod prope » polum est. Nam veritas est quod non movetur ad stellam illam dictam, sed » ad polum, cujus probationem afferemus in suo capitulo. »

Et pour prouver ce qu'il avance, voici comme il raisonne chap. 10: « Cujus » signum etiam evidens est, quod ubicunque homo fuerit, videt ad oculum hujus » lapidis motum secundum situm sui orbis meridiani. Omnes autem orbes me- » ridiani in polos concurrunt, quare a polis mundi poli magnetis virtutem re- » cipiant. Et ex hoc apparet manifeste, quod non ad stellam nauticam movetur, » cum ibi non concurrant orbes meridiani, sed in polis. Stella enim nautica » extra orbem meridianum cujuslibet regionis semper invenitur visibilis. Lo- » quendo enim de uno meridiano unius loci terrae stella nautica bis invenitur » in eo incompleta firmamenti revolutione. Ex his ergo manifestum est, quod a » partibus coeli partes magnetis virtutem recipiant ».

(1) Voyez p. e. LIBES, *Hist. phil. des progrès de la Physique, T. I. p.* 260. YOUNG, *Nat. Philos..* T. 1, p. 746.

(2) Feu le professeur *J. Geel*, était bibliothécaire de la Bibl. de l'Université de Leide; mort il y a 3 ans. (NOTE DU TRADUCTEUR. 1864).

(3) Catal. Bibliothecæ. Lugd. Batavæ. mss. Chymici Q. 27.

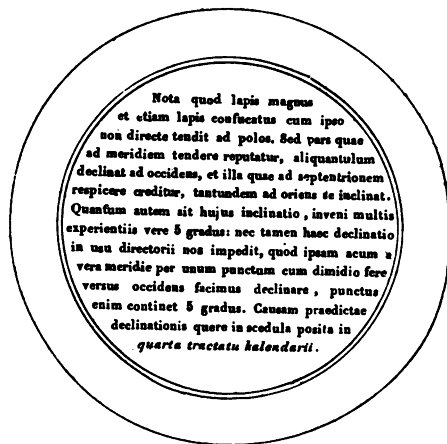
La seconde partie de la lettre contient trois chapitres: le premier chapitre donne la description de l'instrument avec lequel on peut apprendre l'azimuth du soleil, de la lune ou des étoiles; un aimant placé dans une boîte nageant sur l'eau, une règle pourvue de chevilles, et un cercle autour du tonneau qui contient l'eau, servent à ce but. Dans le second chapitre est décrit un pareil instrument, mais meilleur que le précedent, selon ce que dit l'auteur de la lettre: une barre de fer se tournant sur un axe vertical, placée dans une boîte pourvue d'un couvercle de verre, est rendue magnétique par l'attouchement (le contact) d'un aimant, se place dans le méridien et indique à l'aide de la règle, qui est aussi appliquée ici, et qui est dirigée au corps céleste, l'azimuth. Le troisième chapitre décrit une construction pour établir à l'aide d'un aimant un perpetuum mobile, ou comme le nomme l'auteur de la lettre une *rota perpetui motus*.

Ce chapitre ainsi que toute la lettre est terminé par les mots: « Vale, actum » in castris in obsidione . . . . . anno domini MCCLXIX° 8° die Augusti. »

Après le mot *Obsidione* se trouve probablement le nom de la ville assiégée, mais avec des abreviations et si indistinctement que je n'ai osé l'ajouter (1).

C'est à la fin du second chapitre de ce second volume qu'on rencontre les lignes qui font mention de la déviation de l'aimant et que nous faisons suivre ici verbalement.

« Nota quod partem meridionalem acus in usu directorii debemus facere » declinare per unum punctum versus occidens. Et hoc debet fieri per declina- » tionem partis septentrionalis ad oriens, quia pars meridiana instrumenti di- » visionibus caret ».



(1) Le Professeur HAMAKER, que les sciences ont trop tôt perdu, crut qu' on pourrait lire le nom de la place *Nocera*. On sait que CHARLES d' ANJOU, roi de Sicile, assiégea, l'an 1269 *Nocera* ou *Luceria*, le dernier refuge des Sarrassins au midi de l'Italie, et qu'il prit cette place après une longue et héroique résistance. Voy. SABAE MALASPINAE, *Rerum Sicularum* lib. VI. dans MURATORII *Rerum Italicarum scriptores*, T. VII, p. 858; et CARUSII *Biblioth. Hist. regni Siciliae*. Panormi 1723, T. II, p. 945.

On voit que le mss. parle en effet et en termes bien nets de la déviation de l'aiguille aimantée, qu'il porte vraiment la date de 1269, et qu'à la première leçon il induit à poser que la déviation de l' aiguille fut déja un fait connu l'an 1269.

Mais cette supposition n'est à défendre que lorsque l'authenticité du manuscrit et spécialement de la date et des lieux cités est prouvée ou rendue vraisemblable.

Et en premier lieu il faut remarquer que le manuscrit paraît être d' une date postérieure à l'an 1269, et bien du 15e siècle ou d'un temps encore moins reculé. Il y a donc de la possibilité qu'on y ait fait des additions postérieures, lorsque la déviation de l'aiguille aimantée était déja un fait connu: et cette possibilté est devenue pour moi une probabilité par suite d' un examen établi à ce sujet.

Le manuscrit de Petrus Adsigerius, pour autant que je sache, est le seul existant sous ce nom, et ce nom lui-même est tout-à-fait inconnu ; du moins je n'ai pu le trouver nulle part; mais entre les repassant les plus anciens ouvrages sur le magnétisme, bientôt me vint entre les mains un petit ouvrage sous le titre de Petri Peregrini *Maricurtensis de magnete seu rotâ perpetui motus libellus. Divi Ferdinandi Rhomanorum imperatoris auspicio per* Achillem P. Gasserum L. *nunc primum promulgatus*: *Augsburgi in Suevis anno salutis* 1558 (1). Et à peine cus–je ouvert le petit livre de Petrus Peregrinus, que je vis que les deux ouvrages étaient les mêmes: tous deux divisés en deux parties, chacune contenant le même nombre de chapitres; les chapitres portant les mêmes titres: je comparai les textes minutieusement, et à deux exceptions près, je n'y trouvai des différences que telles qui se rencontrent fréquemment entre deux manuscrits du même écrit, ne consistant qu'en de très petites variations dans le choix ou l'arrangement des mots, sans qu'aucun des deux contînt des faits qui ne se trouvaient dans l'autre.

Il est donc probable que les deux pièces n'étaient qu'un même texte. S'il en était ainsi, l'un des deux noms ne devrait être juste, et encore la lettre d'Adsigerius, en la comparant avec le petit ouvrage de Petrus Peregrinus me donna droit à tenir le dernier comme le véritable.

Après la préface de Gasserus, dans le livre imprimé la pièce de Peregrinus suit sous ce titre–ci: « *Epistola* Petri Peregrini *de Maricourt ad* Sygerum *de* » *Foncaucourt militem*, *de magnete*. Et est tractatus de rotâ perpetui motûs. »

En supprimant dans cette adresse le surnoms de celui qui a écrit la lettre et de celui à qui elle était adressée, elle devient:

« *Epistola* Petri *ad* Sygerum », etc.

et l'on voit d'abord comment (encore que la terminaison de *um* est écrite par une abréviation) le nom de Petri Adsigerii en a pu résulter.

Ainsi l'inconnu Petrus Adsigerius était devenu tout-à-coup un personnage connu. Petrus Peregrinus se rencontre dans plusieurs ouvrages. Peregrinus, l'é-

(1) Noté au Catal. de la Bibliothèque de Leide, p. 148.

tranger, le pélérin, était le nom, qui du temps des croisades, fut souvent donné à des croisés, qui retournaient dans leur patrie après plusieurs années d'absence. Mais un certain PETRUS PEREGRINUS se rencontre de plus dans les *Dei Gesta per Francos* d'une liste de *Principes*, *praelati*, *milites*, *qui his autoribus memorati bellis istis Orientalibus adfuerunt*. SIGERUS est de même un nom bien connu dans ces temps-là. Dans cette même liste on trouve entr'autres SEIHER *de Mamedune*.

La famille de MARICOURT se trouve dans le *Dictionnaire de la Noblesse* par *de la Chenaux-Desbois* au mot *Maricourt*.

Maricourt est un petit village dans le Département de la Somme en Picardie (1), marqué sur les cartes détaillées de la Picardie. Sur ces cartes se trouvent aussi les villages de *Faucaucourt*, *Fauquecourt*, *Faucaucourt–Hors Nesle* et *Faucoucourt*.

La même lettre qui porte les noms de PETRUS ADSIGERIUS et de PETRUS PEREGRINUS est encore connue sous un troisième nom. L'an 1562, donc 4 ans après la publication d'ACHILLES GASSERUS, il parut à Cologne un petit ouvrage, portant le titre de:

IOH. TAISNIER *Athensis poëtae laurati, utriusque juris doctoris, Opusculum perpetuâ memoriâ dignissimum de naturâ magnetis et ejus effectibus*. Colon. 1562 (2).

En comparant cet ouvrage avec la lettre de PETRUS PEREGRINUS, il se présente une concordance presque littérale qui ne laisse le moindre doute au plagiat dont le poëte lauréat belge s'est rendu coupable, et dont il a été accusé par tous les écrivains qui ont écrit plus tard sur l'aimant (3).

Cependant l'article de Taisnier, aussi bien que la lettre de PEREGRINUS, comme elle a été publiée par GASSERUS, diffèrent en deux particularités remarquables du manuscr. de Leide: 1.° ils ne finissent pas avec les mêmes mots: « Vale, » Actum . . . . . 8° die Augusti »: ils ne portent donc point de date; et 2.° il y manque le passage intéressant où il est parlé de la déviation de l'aiguille aimantée. Au lieu des mots: « Nota quod partem meridionalem », etc. jusqu'à: « in » quarto tractatu kalendarii », et au lieu des cercles qui y sont ajoutés, on trouve chez GASSERUS et TAISNIER le dessin d'un compas dans lequel l'aiguille passe par un axe mouvant et est rendue magnétique par l'approchement (le contact) d'un aimant: à coté de cette figure on lit:

« Et haec est jam dicti lapidis instrumentalis descriptio, ut hic depicta est ».

Et un peu plus bas:

« Totum cooperculum sit de crystallo vel simili materiâ transparenti, ut » limbum ABCD contineat. Limbus vero hanc totam superficiem continens, vi» delicet FGHI, est circulus pyxidis continentis, constituens cum cooperculo su» perficiem unam. »

(1) Conf. MASSÉLIN. Dictionnaire des Géographies, 1821, in voce.
(2) Catal. Bibl. publ. Lugd. Bat., p. 148.
(3) Voy. p. e. *Universal-Lexicon aller Künste und Wissenschaften*. Leipz. 1741, fol. Bd., 27 in voce: *Petr. Per.*

Les deux ouvrages imprimés ne contiennent donc aucun mot qui puisse faire naître la supposition que Petrus Peregrinus connût la déviation de l'aiguille aimantée, et quoique le petit ouvrage de Peregrinus fut connu partout, il n'y avait point de raison pour lui attribuer cette découverte, tant que le manuscrit de Leide n'y donna aucun motif.

Il faut donc poser la question : la date aussi bien que le passage relatif à la déviation doivent-ils être considérés comme s'étant trouvés dans la lettre originale de Petrus Peregrinus et sont ils omis plus tard par les copistes ou éditeurs, ou bien faut-il les considérer tous deux comme étant glissés dans le manuscrit de Leide.

Quant à la date prise isolément il n'y a aucune invraisemblance : Petrus Peregrinus vécut environ l'an 1269. Gasserus, dans la préface de son édition dit: « qui vir (P. Peregrinus) quis fuerit aut quando vixerit, ut non habeo hercle quòd » certo asseverare ausim, ita naturæ archanorum consultissimum et eundem Gal- » lum vix totos *trecentos* ante annos fuisse si dixero me neque absurda pro- » tulisse arbitrabor », etc. Ceci fut écrit par Gasserus l'an 1558, et 300 ans plus tôt nous conduit à l'an 1258, ce qui s'accorde de bien près avec l'an 1269.

Si la place assiégée, nommée en même temps que la date, est *Nocera*, ce nom aussi plaiderait pour la justesse de cette date. En outre il n'est pas étrange qu'un général français ayant appris en Italie plus précisément les propriétés de l'aimant, en communique ses observations à un ami et compatriote. C'est bien de cette manière que dans ce temps-là beaucoup de connaissances, acquises dans les croisades, sont se divulguées vers l'Ouest de l'Europe; et peut-être la connaissance de l'aiguille aimantée est arrivée de cette manière de l'Arabie en Europe.

Afin de pouvoir juger de l'authenticité de la date ainsi que du passage où il est parlé de la déviation de l'aimant, j'ai tâché de confronter la lettre imprimée de Pérégrinus avec les manuscrits existants.

Pour autant que j'ai pu apprendre il existe de la lettre de Pérégrinus, à l'exception de celui de Leide, encore 7 ou 8 manuscrits.

un appartient au Trinity-College à Dublin;

trois se trouvent à Oxford dans la Bibliothèque Bodléienne;

un se trouve à la Bibliothèque royale (impériale) à Paris (1);

un à la Bibliothèque de la Ville de Génève (2);

un à la Bibliothèque de l'Athenée royal de Turin (3);

un enfin se trouve, selon Gasserus dans sa préface, à la *Bibliotheca Castellana* à Venise; mais il est bien possible que cet exemplaire est parti de là depuis l'an 1558, et qu'il soit l'un des exemplaires sus-mentionnés.

Le professeur Rigaud à Oxford, a eu la bonté d'examiner pour moi les mss. de la Bibliothèque Bodléienne et m'en a communiqué ce qui suit:

(1) *Catalogus codicum mss. Bibliotecae Regiae*. Paris, 1744 fol. Pars III. T. IV. n° 7378 A.

(2) Ceci se trouve sur le *Catalogue raisonné des Mss., conservés dans la Bibl. de la ville et républ. de Génève, par* J. Senebier. Génève 1779. 8°, à la page 207 sous le n° 80.

(3) Celui-ci se trouve comme codex 947, i. II, parmi les codices Mss. Bibliothecae regni Taurinensis Athenaei, Taurini, 1749 fol., T. II, p. 292.

Un des manuscrits semble être de la deuxième partie du 13e siècle; le second, du commencement du 14e siècle, et le troisième paraît un peu postérieur au second; il m'est cependant douteux si ce troisième soit véritablement la lettre de PEREGRINUS, puisqu'il ne contient aucun titre, commence avec d'autres mots que la lettre de PEREGRINUS, et qu'à la marge est écrit d'une main postérieure· « R. Bakon de naturâ magnetis, quidam attribuunt PETRO PEREGRINO sive de Ma- » ricurtia. » Aucun des trois mss. n'est terminé par « *Vale*, *actum*, » etc.; et pour ce qui regarde les 5° de déviation, le professeur RIGAUD dit, qu'à cause de la grande difficulté à entendre le texte écrit en caractères très-antiques et avec beaucoup d'abréviations, il ne l'a pas lu entièrement, mais qu'il peut dire seulement qu'il a fait ses recherches sans succès.

Pour ce qui regarde le manuscrit de Dublin, le professeur RIGAUD me promet, après l'avoir fait examiner par un ami, des communications, si cet examen aurait fait trouver quelque chose d'intéressant: comme je n'ai reçu aucune communication, il me paraît que les deux indications ne s'y trouvent pas.

Quant au manuscrit à Paris, M. LIBRI, membre de l'Institut de France, m'a promis de le collationner; tant que le résultat de cette collation ne m'est parvenue, je n'en puis rien dire.

Dans le *Catalogue raisonné* de SENEBIER le contenu du manuscrit de Genève est donné amplement, et marque exactement tout ce que le ms. contient d'intéressant. Peut-être il n'aurait pas fait mention de la date, mais il est impossible qu'il eût passé en silence les 5° de déviation.

Enfin le ms. de Turin, c'est probablement celui après lequel la lettre de PEREGRINUS a été publiée par GASSERUS, puisqu'il est décrit ainsi dans le catalogue: « Chartaceus, constat foliis 35 saeculi XVI in quo Petri Peregrini Ma- » ricurtensis de magnete seu rotâ perpetui motus libellus, Divi Ferdinandi Ro- » manorum Imperatoris auspicio per Achillem P. Gasserum promulgatus. In fine » sunt pauca Gasseri carmina cum elencho veterum scriptorum de magnete ». Ce manuscrit probablement contient donc aussi peu que les autres les passages cherchés.

Il est donc probable qu'aussi bien la date, que le passage, où il est parlé de la déviation de l'aiguille, ne se trouvent dans aucun des manuscrits de PETRUS PEREGRINUS. Que devons-nous conclure de cela? Pour ce qui regarde la date je suis en doute, mais pour ce qui regarde les 5° de déviation, je crois avoir le droit de conclure, qu'ils ont été insérés dans le ms. par un copiste postérieur après que la déviation était devenue une propriété connue. Je suis encore amené à cette conclusion en comparant les lignes, où il est parlé de la déviation avec le reste du texte de la lettre. Car il paraît qu'il y a de la contradiction entre ces deux parties.

1.° l'instrument est décrit dans le texte comme ayant un bord divisé en 360 degrés; dans ces lignes il est dit que la partie méridionale du bord n'a point de divisions; et

2.° et ceci est bien le principal: dans le texte même au chap. 7 du pre-

mier volume il est dit positivement dans les mots que j'ai rapportés, page 274 (1), que l'on voit à chaque lieu du globe l'aiguille aimantée se diriger selon le méridien de ce lieu, et conséquemment selon les véritables septentrion et midi. Comment PEREGRINUS put-il dire cela si positivement, si par beaucoup d'essais, *multis experientiis*, il avait appris à connaître une déviation de 5° du véritable septentrion?

3° Enfin il est bien digne d'être mentionné que suivant l'opinion du professeur BARLOW à Woolwich, qui, comme on sait, s'est occupé tout-exprès du magnétisme terrestre, et que j'ai consulté sur ce sujet, une déviation orientale de 5° dans quelque partie de l'Europe, au 13e siècle est tout-à-fait en contradiction avec toute loi de variation dans la déviation de l'aiguille aimantée. S'il y avait des faits à opposer à ce sentiment fondé sur des bases théoriques, je n'y ajouterais pas une grande importance; mais il père en le balançant contre un manuscrit en contradiction avec soi-même.

De tout ce qui précède j'ose conclure que le nom d'*Adsigerius* doit être effacé dans l'histoire de la physique; que PETRUS PEREGRINUS ne connaissait pas la déviation de l'aiguille aimantée, et que, pour autant que nos informations le permettent, nous n'avons point de fond pour attribuer au 13e siècle la découverte de cette propriété si intéressante.

La prétention de PETRUS PEREGRINUS s'étant démentie, nous avons à rechercher le premier observateur postérieur de la déviation de l'aiguille. Les auteurs qui ont traité ce sujet font mention de trois hommes dignes de remarque: le vénitien SÉBASTIEN CABOT ou CHABOT, premier pilote d'Angleterre, sous le règne de HENRI VII et de HENRI VIII, le Français CRIGNON, pilote à Dieppe, environ l'an 1530, et le Génois CHRISTOPHE COLOMB, le célèbre découvreur du nouveau monde: et je crois que pour chacun qui n'est pas compatriote d'un de ces hommes, après avoir considéré les fondements sur lesquels la prétention de chacun d'eux est basée, il ne sera pas difficile à conclure à qui d'entr'eux appartient l'honneur de la première découverte.

GILBERTUS dans son ouvrage *de Magnete*, publié en 1600, dit à la page 4, que SÉBASTIEN CABOT a remarqué et observé le premier la déviation. Il est notoire que CABOT a commencé ses longs voyages l'an 1497; il publia son ouvrage, où il est parlé de la déviation l'an 1549 (2).

Le titre de droit de CRIGNON ne repose que sur un manuscrit de sa main, dédié l'an 1534 à SÉBASTIEN CHABOT, et dans lequel est fait mention de la déviation de l'aiguille; la simple mention d'un phénomène, observé déja plutôt, ne donne cependant aucun droit au nom de découvreur. Ce manuscrit était dans la possession du géographe connu DÉLISLE.

(1) Page 6 de cette traduction-ci. (NOTE DU TRADUCTEUR).

(2) Ainsi se lit dans NAVARRETE, Relation des quatre voyages, entrepris par CHRISTOPHE COLOMBE, tom. I. Dans la *Biographie Universelle* tom. II. in voce CHABOT, il est dit, qu'en vain on a cherché dans le vol. II. de la collection des itinéraires de RAMUSIUS (publiés 1563—1566 en 3 voll in fol.) le récit de voyage de CHABOT et qu'on a douté de l'existence du livre intitulé: « Sebastiano Cabota, Navi- » gatione nelle parte settentrionali, Venetia 1583 », mentionné dans le Catal. Bibl. Bodley. Oxford 1674 fol. pag. 122.

Bien plus définis sont les droits sur lesquels ont attribue cette découverte à COLOMB. Aussi bien des *Voyages* de CHRISTOPHE COLOMB par M. WASHINGTON IRVING (1) que du récit des voyages de COLOMB de NAVARRETE (2) il est évident que Colomb a sa première expédition se trouva le soir du 13 septembre 1492 à 200 lieues Ouest de l'Ile de Ferro (3), lorsqu'il observa pour la première fois que l'aiguille aimantée au lieu de se diriger vers l'astre polaire du Nord, dévia à peu près une demi-pointe de compas, ou 5° à 6° vers le Nord-Ouest: le matin suivant la différence était encore plus grande : frappé de cette particularité, il observa le phénomène pendant trois jours, et remarqua que la déviation augmenta à mesure qu'il s'avançait vers le Ouest.

Ce phénomène ne resta pas longtemps caché aux pilotes et les remplit de terreur. Craignant depuis longtemps que ces mêmes vents constants qui leur étaient propices au départ, ne leur rendraient impossible le retour dans leur patrie, leur crainte s'accrut encore en observant que leur seul guide dans les temps couverts et dans les orages les abandonna.

Il réussit pourtant à COLOMB de leur rendre la tranquillité, en disant que l'aiguille ne se dirigeait point vers l'étoile polaire mobile, mais vers un point stable.

On voit que les indications de temps, de lieu et de circonstances parlent fortement en faveur de COLOMB. Puisqu'en tous cas CABOT n'a pu faire cette observation que bien postérieurement, et que d'autres compétiteurs plus anciens que COLOMB (excepté notre PETRUS PEREGRINUS, dont les titres sont rejétés comme n'ayant de valeur) ne sont nommés, l'honneur de la première découverte reste à COLOMB.

En considérant la communication lente des découvertes dans ces temps-là, il est pourtant bien probable, que dans les expéditions entreprises après lui pour diverses contrées, cette même observation ait été faite par plusieurs voyageurs, sans que ceux-ci scussent que le phénomène avait été observé par d'autres avant eux, et je n'ai aucun fond pour croire p. e. que CABOT 5 ans après avait connaissance aux particularités du voyage de COLOMB. Combien lentement la connaissance de la déviation de l'aiguille aimantée se repandit, est prouvé par ce que NAVARRETE raconte que PEDRO DE MEDINA, dans son ARTE DE NAVIGARE, publié pour la première fois l'an 1545, nie encore cette déviation; cependant l'an 1556 elle est acceptée par MARTIN CORTEZ comme une chose prouvée; et peu de temps après les écrivains ont déjà rassemblé une suite d'observations sur divers points de la terre au profit de la navigation; parmi lesquels, selon le témoignage de GILBERTUS, nos compatriotes PETRUS PLANCIUS et SIMON STEVIN doivent être placés au premier rang.

(1) Trad. de l'anglais par C. A, de FAUCONPRET, fils. Paris 1828. tom. I. p. 162.
(2) *Rélations des quatre voyages*, entrepris par CHRIST, COLOMB, par M. F. de NAVARRETE; trad. de l'Espagnol. Paris 1828. 3 vol. in 8.°
(3) Ceci s'accorde, selon la carte itinéraire de COLOMB dans l'ouvrage de WASHINGTON IRVING à environ 28° de lat. septent. et de 29° de longitude de Greenwich.



SULLA QUADRATURA

DI

ALCUNE SUPERFICIE RISULTANTI DALLA INTERSEZIONE

DI CILINDRI

NOTA

DELL' INGEGNERE FILIPPO LANCIANI.

I cilindri, che s' intersecano in varii modi fra loro, danno luogo a moltissime vôlte, che occorrono frequentemente nell'Architettura. Il conoscerne la superficie di queste vôlte è sempre un vantaggio, e talora una necessità. In questi termini però la quistione è soverchiamente generale, e le ricerche geometriche che s' intraprendessero con questo programma sarebbero indefinite. Restringendo pertanto il campo delle presenti ricerche in più angusti confini ci occuperemo della misura delle vôlte che chiamano a *crociera* ed a *schifo*. Ad altra occasione riserberemo il render conto di ulteriori ricerche su questo argomento.

Intanto notiamo che per dare al problema tutta la generalità, di cui è suscettivo, considereremo cilindri a direttrici ellittiche colle generatrici inclinate. E questa ipotesi abbraccia i casi anche meno comuni della pratica.

I. Sieno dunque due cilindri a base ellittica posti in modo che le projezioni de' loro assi cadano una sull' asse OX, l' altra sull' asse OY. L' equazione della direttrice parallela al piano ZOY sarà

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad x=a$$

come l' equazione della direttrice parallela al piano ZOX sarà

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1\,, \qquad y=b$$

Gli assi di questi due cilindri s' incontrino nello stesso punto O' sulla OZ: affinchè le generatrici che passano pei punti C ed E s' incontrino nello stesso punto M

(condizione necessaria al problema che consideriamo) dovrà aversi

$$AC = MO' = DE\,, \qquad \text{ovvero} \qquad c = c_1.$$

Posto dunque

$$AO = BD = a\,,\quad AB = DO = b\,,\quad OO' = MO - MO' = h$$

e chiamate z_1 e z_2 le ordinate delle rette AO′, DO′

avremo

$$a : h :: a - x : z_1 = \frac{h}{a}(a - x)\,, \qquad b : h :: b - y : z_2 = \frac{h}{b}(b - y)$$

ed essendo l'equazioni della generatrice del 1° cilindro

$$y = \alpha\,, \qquad z = \frac{h}{a}(a - x) + \beta$$

e quelle del 2°

$$x = \alpha_1\,, \qquad z = \frac{h}{b}(b - y) + \beta_1$$

l'equazioni dei cilindri diventeranno, com'è noto,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{\left(z - \frac{h}{a}(a - x)\right)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(z - \frac{h}{b}(b - y)\right)^2}{c^2} = 1$$

ossia
$$z = \frac{h}{a}(a - x) \pm \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad (k)$$

$$z = \frac{h}{b}(b - y) \pm \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (k')$$

Ciò posto si tagli prima il cilindro (k), e poi il cilindro (k') con un piano verticale che passi per la retta OB: l'equazione di questa retta sarà

$$y = \frac{b}{a}x,$$

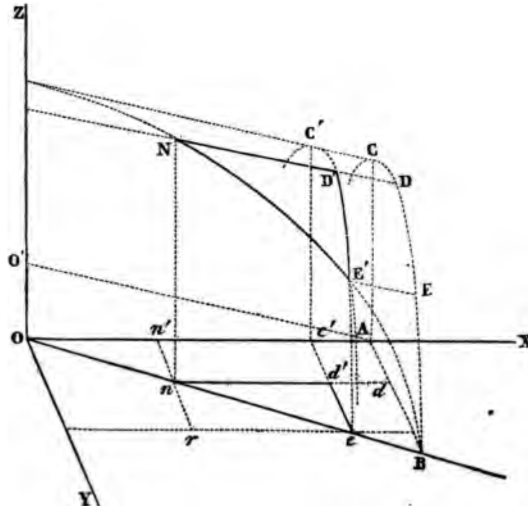
ed introducendo nella (k) e (k') il valore di x e di y dedotto da questa equazione avremo

$$z = \frac{h}{a}(a - x) \pm \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{h}{b}(b - y) \pm \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad (k'')$$

$$z = \frac{h}{a}(a - x) \pm \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{h}{b}(b - y) \pm \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad (k''')$$

L'equazioni (k'') appartengono alle due projezioni della sezione del cilindro (k) sui piani ZOX, ZOY, e sono perfettamente uguali alle due projezioni sugli stessi piani della sezione fatta nel cilindro (k'). Dunque le due sezioni dei cilindri sono perfettamente uguali, e si riducono alla loro comune intersezione, che si projetta sul piano XOY nella retta OB

II. Cerchisi ora la porzione di superficie del cilindro montante o rampante a base ellittica ABCDE



ch'è limitata dalla generatrice D'N projettantesi in $d'n$; dalla sezione C'D'E' parallela alla base del cilindro che si projetta in $d'e$; e dalla intersezione de' due cilindri E'N che si projetta in en. Ritenuti per a, b, c, k, i precedenti valori pongasi

$$c'O = P, \quad n'O = p, \quad c'e = Q, \quad c'd' = q$$

e nella formula generale

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

sostituiscansi per le due derivate i valori tratti dalla equazione (k), e cioè

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{k}{a}, \qquad \frac{dz}{dy} = \mp \frac{c}{b} \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$

avremo

$$S = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a} \int dx \int \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{a^2 c^2}{b^2 (a^2 + k^2)}\right) y^2}$$

Osserviamo che

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2 + k^2}} = w$$

esprime il valore del semiasse minore della ellissi che si otterrebbe tagliando il cilindro con un piano passante per la AB, e perpendicolare alle generatrici, poichè

$$c : w :: \sqrt{a^2 + k^2} : a$$

Pongasi

$$1 - \frac{a^2 c^2}{b^2 (a^2 + k^2)} = 1 - \frac{w^2}{b^2} = m^2 < 1\,;$$

ciò importa che

$$w < b$$

Quanto ai limiti degli integrali essi sono

$$x = P - p, \qquad x_1 = \frac{a}{b} y$$

$$y = Q, \qquad y_1 = q$$

e perciò

$$S = \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a} \int_{\frac{a}{b} y}^{P - p} dx \int_q^Q \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sqrt{b^2 - m^2 y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{a} (P - p) \int_q^Q \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sqrt{b^2 - m^2 y^2} - \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{b} \int_q^Q \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2 - m^2 y^2}} \sqrt{b^2 - m^2 y^2}$$

Facciasi
$$y = b \operatorname{sen} \varphi$$
quando $y = Q$,
$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{Q}{b}, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,sen} \frac{Q}{b}$$
quando $y = q$
$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{q}{b}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arc\,sen} \frac{q}{b}$$
e perciò fatte le debite sostituzioni avremo
$$S = b\sqrt{a^2 + h^2}\left(\frac{P-p}{a}\right)\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - b\sqrt{a^2 + h^2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$
La parte integrale del primo termine colle notazioni di Legendre si esprime per
$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \int_0^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \int_0^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$
$$= E(m, \varphi_1) - E(m, \varphi_2)$$
$E(m, \varphi_1)$ ed $E(m, \varphi_2)$ sono funzioni ellittiche di 2ª specie di modulo $m < 1$ e di ampiezza φ_1 e φ_2.

La parte integrale del secondo termine si ottiene così. Facciasi
$$\cos \varphi = t, \qquad e \qquad \frac{1 - m^2}{m^2} = n^2$$
e sieno t_1 e t_2 i limiti dell'integrale corrispondenti a φ_1 e φ_2 avremo
$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = m \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{n^2 + t^2}$$
$$= \frac{m}{2}\left(t_2\sqrt{n^2 + t_2^2} - t_1\sqrt{n^2 + t_1^2} - n^2 \log\left(\frac{t_1 + \sqrt{n^2 + t_1^2}}{t_2 + \sqrt{n^2 + t_2^2}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos \varphi_2 \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2} - \cos \varphi_1 \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}\right.$$
$$\left. - \frac{1 - m^2}{m} \log\left(\frac{m \cos \varphi_1 + \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{m \cos \varphi_2 + \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_2}}\right)\right).$$
Ma
$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{Q}{b}, \qquad \cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{b^2 - Q^2}}{b}, \qquad \operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{q}{b}, \qquad \cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{b^2 - q^2}}{b}$$

perciò

$$\int_q^Q \frac{ydy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{b^2-q^2}\,\sqrt{b^2-m^2q^2}}{b^2}-\frac{\sqrt{b^2-Q^2}\,\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{b^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2-Q^2}+\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}+\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right)\right)$$

per cui la superficie cercata sarà

$$S=b\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{P-p}{a}\right)\Big(E(m,\varphi_1)-E(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-b\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2}\left(\frac{\sqrt{b^2-q^2}\,\sqrt{b^2-m^2q^2}-\sqrt{b^2-Q^2}\,\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{b^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2-Q^2}+\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}+\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right)\right) \qquad (k^{\text{IV}})$$

Nell' altro cilindro la cui direttrice ha per semiassi a e c si ottiene una espre analoga per l' area che si projetterebbe in enr, cambiando a in b, b in a, P i Q in P, etc. mentre

$$m_1^2=1-\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+h^2)}=1-\frac{w_1^2}{a^2}<1$$

ciocchè esige che si abbia

$$w_1<a$$

tantochè si avrebbe

$$S_1=a\sqrt{b^2+h^2}\left(\frac{Q-q}{b}\right)\Big(E(m_1,\psi_1)-E(m_1,\psi_2)\Big)$$

$$-\frac{a\sqrt{b^2+h^2}}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\,\sqrt{a^2-m_1^2p^2}-\sqrt{a^2-P^2}\,\sqrt{a^2-m_1^2P^2}}{a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1-m_1^2}{m_1}\log\left(\frac{m_1\sqrt{a^2-P^2}+\sqrt{a^2-m_1^2P^2}}{m_1\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{a^2-m_1^2p^2}}\right)\right) \qquad (k^{\text{V}})$$

e risultando l' intera vòlta montante, che qui consideriamo, dalla interse quattro cilindri, uguali due a due fra loro perciò la superficie cercata sarà il druplo delle (k^{IV}) e (k^{V}) e potrà per brevità esprimersi così

$$\Sigma=4\,(S+S_1) \qquad (1)$$

III. La formola (1) abbraccia due classi di vôlte a *crociera,* e cioè quella a generatrici *montanti* e quelle a generatrici *orizzontali*. Ciascuna classe poi contiene quattro categorie di vôlte, e cioè;

(a) le vôlte a direttrici sceme alle imposte a alla chiave che chiameremo *incomplete;*

(b) quelle a direttrici sceme alla chiave, che chiameremo *ogivali,* perchè contengono realmente le vôlte così chiamate;

(c) quelle a direttrici sceme alle imposte soltanto, che chiameremo appunto *sceme;*

(d) quelle a direttrici intere che precisamente perciò chiameremo *complete.*

(a) Posto ciò, sono a vedersi le diverse modificazioni che riceve nei casi accennati la formula (1) cominciando dalle vôlte montanti *incomplete.*

1° Sia $a = b$, e cioè una vôlta a pianta quadrata, avremo

$$m = m_1, \qquad P = \mathfrak{Q}, \qquad p = q, \qquad \varphi_1 = \psi_1, \qquad \varphi_2 = \psi_2$$

e perciò

$$\sum_1 = 8\sqrt{a^2 + h^2}\,(P - p)\Big(E(m,\varphi_1) - E(m,\varphi_2)\Big)$$

$$- 4a\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\,\sqrt{a^2-m^2p^2} - \sqrt{a^2-P^2}\,\sqrt{a^2-m^2P^2}}{a^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{a^2-P^2} + \sqrt{a^2-m^2P^2}}{m\sqrt{a^2-p^2} + \sqrt{a^2-m^2p^2}}\right)\right) \qquad (2)$$

2° Se una direttrice è circolare per cui p. e $b = c$ avremo

$$m^2 = 1 - \frac{a^2}{a^2+h^2}, \qquad m_1^2 = 1 - \frac{b^4}{a^2(a^2+h^2)}$$

in questo caso per brevità la formula (1) potrà scriversi così

$$\sum_2 = 4\left(S_{b=c} + S_{1\,b=c}\right). \qquad (3)$$

3° Se $a = b = c$ (direttrici circolari, pianta quadrata) avremo

$$m^2 = m_1^2 = \frac{h^2}{a^2+h^2}, \qquad \varphi_1 = \psi_1, \qquad \varphi_2 = \psi_2, \text{ ec. ec.}$$

e chiamato r il raggio del circolo delle direttrici sarà

$$\sum_3 = 8\sqrt{r^2+h^2}\,(\mathrm{P}-p)\Big(\mathrm{E}(m,\varphi_1)-\mathrm{E}(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-4r\sqrt{r^2+h^2}\Bigg(\frac{\sqrt{r^2-p^2}\sqrt{r^2-m^2p^2}-\sqrt{r^2-\mathrm{P}^2}\sqrt{r^2-m^2\mathrm{P}^2}}{r^2}$$

$$-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{r^2-\mathrm{P}^2}+\sqrt{r^2-m^2\mathrm{P}^2}}{m\sqrt{r^2-p^2}+\sqrt{r^2-m^2p^2}}\right)\Bigg). \qquad (4)$$

(b) Passando ora dalle vôlte incomplete alle vôlte *ogivali* avremo

$$\mathrm{P}=a,\qquad \mathrm{Q}=b,\qquad \varphi_1=\frac{\pi}{2},\qquad \psi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\mathrm{E}(m)\quad\ldots\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{1-m_1^2\operatorname{sen}^2\psi}=\mathrm{E}(m_1)$$

dove $\mathrm{E}(m)$ ed $\mathrm{E}(m_1)$ sono funzioni ellittiche complete di 2ª specie, e perciò

$$\mathrm{S}_{Q=b}=b\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{a-p}{a}\right)\Big(\mathrm{E}(m)-\mathrm{E}(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-\frac{b}{2}\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{\sqrt{b^2-q^2}\sqrt{b^2-m^2q^2}}{b^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{b\sqrt{1-m^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}+\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right)\right),$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{I}\atop P=a}=a\sqrt{b^2+h^2}\left(\frac{b-q}{b}\right)\Big(\mathrm{E}(m_1)-\mathrm{E}(m_1,\psi_2)\Big)$$

$$-\frac{a}{2}\sqrt{b^2+h^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\sqrt{a^2-m_1^2p^2}}{a^2}-\frac{1-m_1^2}{m_1}\log\left(\frac{a\sqrt{1-m_1^2}}{m_1\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{a^2-m_1^2p^2}}\right)\right)$$

e perciò

$$\sum_4 = 4\left(\mathrm{S}_{Q=b}+\mathrm{S}_{\mathrm{I}\atop P=a}\right) \qquad (5)$$

1° Sia $a=b$ per cui $m=m_1$, $p=q$, $\varphi_2=\psi_2$ sarà

$$\sum_5 = 8\sqrt{a^2+h^2}\,(a-p)\Big(\mathrm{E}(m)-\mathrm{E}(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-4a\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\sqrt{a^2-m^2p^2}}{a^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{a\sqrt{1-m^2}}{m\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{a^2-m^2p^2}}\right)\right) \qquad (6)$$

2.° Se $b = c$, ritenuti i valori di m ed m_1 di cui sopra ((a). 2) scriveremo compendiatamente

$$\sum_6 = 4\left(S_{Q=b=c} + S_{1\,P=a}\right) \qquad (7)$$

3.° Se $a = b = c = r$, r essendo il raggio delle direttrici, sarà come sopra

$$m^2 = m_1^2 = \frac{h^2}{a^2 + h^2}, \qquad \varphi_2 = \psi_2$$

e perciò

$$\sum_7 = 8\sqrt{r^2 + h^2}\,(r - p)\left(E\,(m) - E\,(m, \varphi_2)\right)$$

$$- 4r\sqrt{r^2 + h^2}\left(\frac{\sqrt{r^2 - p^2}\,\sqrt{r^2 - m^2p^2}}{r^2} - \frac{1 - m^2}{m}\log\left(\frac{r\sqrt{1 - m^2}}{m\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - m^2p^2}}\right)\right) (8)$$

(c) Dalle vôlte ogivali passando alle vôlte *sceme* abbiamo

$$p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \quad \psi_2 = 0\,, \quad E\,(m, \varphi_2) = 0\,, \quad E\,(m_1\,, \psi_2) = 0$$

e perciò

$$S_{q=0} = b\sqrt{a^2 + h^2}\,\frac{P}{a}\cdot E\,(m, \varphi_1)$$

$$- b\,\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2}\left(\frac{b^2 - \sqrt{b^2 - Q^2}\,\sqrt{b^2 - m^2Q^2}}{b^2} - \frac{1 - m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2 - Q^2} + \sqrt{b^2 - m^2Q^2}}{b\,(1 + m)}\right)\right)$$

$$S_{p=0} = a\sqrt{b^2 + h^2}\,\frac{Q}{b}\,E\,(m_1\,, \psi_1)$$

$$- a\,\frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{2}\left(\frac{a^2 - \sqrt{a^2 - P^2}\,\sqrt{a^2 - m_1^2P^2}}{a^2} - \frac{1 - m_1^2}{m_1}\log\left(\frac{m_1\sqrt{a^2 - P^2} + \sqrt{a^2 - m_1^2P^2}}{a\,(1 + m_1)}\right)\right)$$

e perciò

$$\sum_8 = 4\left(S_{q=0} + S_{1\,p=0}\right) \qquad (9)$$

1.° Posto

$$a = b$$

per cui

$$P = Q\,, \qquad m = m_1\,, \qquad \varphi_1 = \psi_1$$

sarà

$$\sum_9 = 8\sqrt{a^2+h^2}\,.\,\mathrm{P}\,.\,\mathrm{E}\,(m,\varphi_1)$$

$$-4a\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{a^2-\sqrt{a^2-\mathrm{P}^2}\sqrt{a^2-m^2\mathrm{P}^2}}{a^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{a^2-\mathrm{P}^2}+\sqrt{a^2-m^2\mathrm{P}^2}}{a\,(1+m)}\right)\right). \quad (10)$$

2.° Posto p. e. $b=c$ e rammentati i precedenti valori di m, m_1 ((a) 2°) potremo scrivere la (9) così

$$\sum_{10} = 4\left(\mathrm{S}_{\substack{\varphi=0\\ b=c}} + \mathrm{S}_{1\,\substack{\varphi=0\\ b=c}}\right) \quad (11)$$

3.° Posto $a=b=c=r$ per cui

$$m=m_1, \qquad \varphi_1=\psi,$$

sarà

$$\sum_{11} = 8\sqrt{r^2+h^2}\,.\,\mathrm{P}\,.\,\mathrm{E}\,(m,\varphi_1)$$

$$-4r\sqrt{r^2+h^2}\left(\frac{r^2-\sqrt{r^2-\mathrm{P}^2}\sqrt{r^2-m^2\mathrm{P}^2}}{r^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{r^2-\mathrm{P}^2}+\sqrt{r^2-m^2\mathrm{P}^2}}{r\,(1+m)}\right)\right). \quad (12)$$

(d) Nelle vôlte *complete* abbiamo

$$\varphi_1=\frac{\pi}{2}, \qquad \psi_1=\frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{P}=a, \qquad \mathrm{Q}=b,$$

e perciò

$$\mathrm{S}_{\substack{b=\mathrm{Q}\\ \varphi=0}} = b\sqrt{a^2+h^2}\,\mathrm{E}\,(m)$$

$$-\frac{b\sqrt{a^2+h^2}}{2}\left(1-\frac{1-m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right)$$

$$\mathrm{S}_{1\,\substack{a=\mathrm{P}\\ p=0}} = a\sqrt{b^2+h^2}\,.\,\mathrm{E}\,(m_1)$$

$$-a\,\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2}\left(1-\frac{1-m_1^2}{m_1}\log\sqrt{\frac{1-m_1}{1+m_1}}\right)$$

e perciò

$$\sum_{12} = 4\left(\mathrm{S}_{\substack{b=\mathrm{Q}\\ \varphi=0}} + \mathrm{S}_{1\,\substack{a=\mathrm{P}\\ p=0}}\right) \quad (13)$$

1° Se $a = b$, $m = m_1 = \frac{h^2}{a^2 + h^2}$ e perciò

$$\Sigma_{13} = 8a\sqrt{a^2 + h^2}\,\mathrm{E}(m)$$

$$- 4a\sqrt{a^2 + h^2}\left(1 - \frac{1 - m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1 - m}{1 + m}}\right) \qquad (14)$$

2° Se $b = c$ Valgono per m ed m_1 i precedenti valori ((a) 2°) e perciò

$$\Sigma_{14} = 4\left(\mathrm{S}_{\substack{c=b\ \mathrm{Q} \\ q=0}} + \mathrm{S}_{1\,\substack{a=\mathrm{P} \\ p=0}}\right) \qquad (15)$$

3° Se $a = b = c = r$, rammentato che

$$m = m_1$$

Sarà

$$\Sigma_{15} = 8r\sqrt{r^2 + h^2}\,\mathrm{E}(m)$$

$$- 4r\sqrt{r^2 + h^2}\left(1 - \frac{1 - m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1 - m}{1 + m}}\right) \qquad (16)$$

IV. Da queste vôlte montanti è facilissimo il passaggio alle vôlte a direttrici *orizzontali* per le quali

$$h = 0$$

e perciò le precedenti formule (1) . . . . . (16) si modificano come qui appresso

(a) *Crociere incomplete.* La formula (1) in cui

$$m^2 = 1 - \frac{c^2}{b^2}, \quad m_1^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad \text{dove} \quad c < b, \quad c < a$$

diventa

$$\mathrm{S} = b(\mathrm{P} - p)\left(\mathrm{E}(m, \varphi_1) - \mathrm{E}(m, \varphi_2)\right)$$

$$- \frac{ab}{2}\left(\frac{\sqrt{b^2 - q^2}\sqrt{b^2 - m^2q^2} - \sqrt{b^2 - \mathrm{Q}^2}\sqrt{b^2 - m^2\mathrm{Q}^2}}{b^2} - \frac{1 - m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2 - \mathrm{Q}^2} + \sqrt{b^2 - m^2\mathrm{Q}^2}}{m\sqrt{b^2 - q^2} + \sqrt{b^2 - m^2q^2}}\right)\right)$$

$$\mathrm{S}_1 = a(\mathrm{Q} - q)\left(\mathrm{E}(m_1, \psi_1) - \mathrm{E}(m_1, \psi_2)\right)$$

$$- \frac{ab}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2 - p^2}\sqrt{a^2 - m_1^2p^2} - \sqrt{a^2 - \mathrm{P}^2}\sqrt{a^2 - m_1^2\mathrm{P}^2}}{a^2} - \frac{1 - m_1^2}{m}\log\left(\frac{m_1\sqrt{a^2 - \mathrm{P}^2} + \sqrt{a^2 - m_1^2\mathrm{P}^2}}{m_1\sqrt{a^2 - p^2} + \sqrt{a^2 - m_1^2p^2}}\right)\right)$$

e perciò

$$\mathfrak{S} = 4(\mathrm{S} + \mathrm{S}_1) \qquad (17)$$

1° Se $a = b$ allora

$$m = m_1, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{Q}, \qquad p = q$$

e perciò $\qquad \mathcal{E}_1 = 8a\,(P-p)\,(E(m,\varphi_1) - E(m,\varphi_2))$

$$-4a^2\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\sqrt{a^2-m^2p^2}-\sqrt{a^2-P^2}\sqrt{a^2-m^2P^2}}{a^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{a^2-P^2}+\sqrt{a^2-m^2P^2}}{m\sqrt{a^2-p^2}-\sqrt{a^2-m^2p^2}}\right)\right) \quad (18)$$

2.° Se $b=c$ allora

$$m=0\,,\quad \int_0^{\varphi_1} d\varphi = \varphi_1 = \text{arc sen}\,\frac{Q}{b}\,,\qquad \int_0^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 = \text{arc sen}\,\frac{q}{b}\,,$$

inoltre

$$\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2-Q^2}+\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}-\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right)=\frac{0}{0}=\frac{\sqrt{b^2-Q^2}}{b}-\frac{\sqrt{b^2-q^2}}{b}$$

e perciò

$$S_{\text{[illegible]}} = b\,(P-p)\left(\text{arc sen}\,\frac{Q}{b}-\text{arc sen}\,\frac{q}{b}\right)$$

$$-a\,(\sqrt{b^2-q^2}-\sqrt{b^2-Q^2})$$

ed S_1 rimane inalterato, per cui

$$\mathcal{E}_2 = 4\,(S_{\text{[illegible]}} + S_1) \qquad (19)$$

3.° Se $a=b=c=r$ allora anche

$$m_1 = 0\,,\quad \varphi_1 = \psi_1\,,\quad \varphi_2 = \psi_2\,,\quad P = Q\,,\quad p = q$$

e perciò

$$\mathcal{E}_3 = 8r\,(P-p)\left(\text{arc sen}\,\frac{P}{r}-\text{arc sen}\,\frac{p}{r}\right)$$

$$-8r\,(\sqrt{r^2-p^2}-\sqrt{r^2-P^2}) \qquad (20)$$

(b) *Crociere ogivali.* Dal precedente N.° (III (b)) abbiamo

$$S_{\text{[illegible]}} = b\,(a-p)\Big(E(m) - E(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{\sqrt{b^2-q^2}\sqrt{b^2-m^2q^2}}{b^2}-\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{b\sqrt{1-m^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}+\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right)\right)$$

ed

$$S_{2\,\text{[illegible]}} = a\,(b-q)\Big(E(m_1) - E(m_1,\psi_2)\Big)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\sqrt{a^2-m_1^2p^2}}{a^2}-\frac{1-m_1^2}{m_1}\log\left(\frac{a\sqrt{1-m_1^2}}{m_1\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{a^2-m_1^2p^2}}\right)\right)$$

e quindi

$$\mathcal{E}_4 = 4\left(S_{\text{[illegible]}} + S_{2\,\text{[illegible]}}\right) \qquad (21)$$

1° Se $a = b$, si ha altresì, come sopra

$$m = m_1, \qquad P = Q, \qquad \varphi_2 = \psi_2$$

e perciò

$$\mathfrak{S}_5 = 8a\,(a-p)\Big(E\,(m) - E\,(m,\varphi_2)\Big)$$

$$-4\,a^2\left(\frac{\sqrt{a^2-p^2}\,\sqrt{a^2-m^2p^2}}{a^2} - \frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{a\sqrt{1-m^2}}{m\sqrt{a^2-p^2}+\sqrt{a^2-m^2p^2}}\right)\right) \quad (22,$$

2° Se $b = c$, per esempio

$$m = 0, \quad E\,(m) = \frac{\pi}{2}, \qquad E\,(m,\varphi_2) = \text{arc sen}\frac{q}{b}$$

e perciò

$$S_{Q=b=c} = b\,(a-p)\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\frac{q}{b}\right)$$

$$-a\sqrt{b^2-q^2}$$

poichè

$$\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{b\sqrt{1-m^2}}{m\sqrt{b^2-q^2}+\sqrt{b^2-m^2q^2}}\right) = \frac{0}{0} = -\frac{\sqrt{b^2-q^2}}{b}$$

e perciò rimanendo inalterato $S_{\substack{1\\P=a}}$ avremo

$$\mathfrak{S}_6 = 4\left(S_{Q=b=c} + S_{\substack{1\\P=a}}\right) \quad (23)$$

3° Se $a = b = c = r$ avremo pure

$$m = m_1 = 0, \quad p = q$$

e quindi

$$\mathfrak{S}_7 = 8r\,(r-p)\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\frac{p}{r}\right)$$

$$-8r\sqrt{r^2-p^2} \quad (24)$$

(c) *Crociere Sceme*. Dal precedente (III (c)) risulta che

$$S_{q=0} = bP.\,E\,(m,\varphi_1)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b^2-\sqrt{b^2-Q^2}\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{b^2} - \frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2-Q^2}+\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{b\,(1+m)}\right)\right)$$

ed

$$S_{\substack{1\\p=0}} = aQ.\,E\,(m_1,\psi_1)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2-\sqrt{a^2-P^2}\sqrt{a^2-m_1^2P^2}}{a^2} - \frac{1-m_1^2}{m_1}\log\left(\frac{m_1\sqrt{a^2-P^2}+\sqrt{a^2-m_1^2P^2}}{a\,(1+m_1)}\right)\right)$$

e quindi per brevità

$$\mathfrak{S}_8 = 4\left(S_{q=0} + S_{1\,p=0}\right) \tag{25}$$

1° Sia $a = b$ per cui $P = Q$, $m = m_1$, $\varphi_1 = \psi_1$, avremo

$$\mathfrak{S}_9 = 8aP.E(m, \varphi_1)$$

$$-4a^2\left(\frac{a^2 - \sqrt{a^2-P^2}\sqrt{a^2-m^2P^2}}{a^2} - \frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{a^2-P^2}+\sqrt{a^2-m^2P^2}}{a(1+m)}\right)\right) \tag{26}$$

2° Sia $b = c$, avremo come sopra

$$m = 0,\ E(m, \phi_1) = \int_0^{\varphi_1} d\varphi = \text{arc sen}\frac{Q}{b}$$

nonchè

$$\frac{1-m^2}{m}\log\left(\frac{m\sqrt{b^2-Q^2}+\sqrt{b^2-m^2Q^2}}{b(1+m)}\right) = \frac{0}{0} = \frac{\sqrt{b^2-Q^2}}{b} - 1$$

e quindi

$$S_{\substack{q=0\\b=c}} = bP\ \text{arc sen}\frac{Q}{b} - a\left(b - \sqrt{b^2-Q^2}\right)$$

e perciò

$$\mathfrak{S}_{10} = 4\left(S_{\substack{q=0\\b=c}} + S_{1\,p=0}\right) \tag{27}$$

3° Sia $a = b = c = r$ per cui

$$m = m_1 = 0,\quad E(m, \varphi_1) = E(m, \psi_1) = \text{arc sen}\frac{P}{a}$$

avremo

$$\mathfrak{S}_{11} = 8Pr\ \text{arc sen}\frac{P}{r} - 8r\left(r - \sqrt{r^2-P^2}\right) \tag{28}$$

(d) *Crociere complete.* Abbiamo come al (III (d))

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},\qquad \psi_1 = \frac{\pi}{2},\qquad a = P,\qquad b = Q$$

e perciò

$$S_{q=0,\,b=Q} = ab.E(m)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1-m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right)$$

ed

$$S_{1\,p=0,\,a=P} = ab.E(m_1)$$

$$-\frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1-m_1^2}{m_1}\log\sqrt{\frac{1-m_1}{1+m_1}}\right)$$

e perciò

$$\mathfrak{S}_{12} = 4\left(S_{q=0,b=Q} + S_{1\,p=0,a=P}\right) \qquad (29)$$

1° Posto $a = b$

$$\mathfrak{S}_{13} = 8a^2\,E(m)$$
$$-4a^2\left(1 - \frac{1-m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right) \qquad (30)$$

2° Posto $b = c$ si ha

$$m = 0\,, \quad E(m) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1-m^2}{m}\log\sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = \frac{0}{0} = -1$$

e perciò

$$S_{q=0,b=c=Q} = ab\,\frac{\pi}{2}$$
$$-ab$$

e quindi

$$\mathfrak{S}_{14} = 4ab\left(\frac{\pi}{2} + E(m_1)\right)$$
$$-2ab\left(3 - \frac{1-m_1^2}{m_1}\log\sqrt{\frac{1-m_1}{1+m_1}}\right) \qquad (31)$$

3° Posto finalmente

$$a = b = c = r\,, \qquad \text{per cui} \qquad m_1 = 0$$

sarà

$$\frac{1-m_1^2}{m_1}\log\sqrt{\frac{1-m_1}{1+m_1}} = -1$$

e perciò

$$\mathfrak{S}_{16} = 4\pi r^2$$
$$-8r^2 \qquad (32)$$

V. Quanto alle vôlte a *schifo* cerchiamo anzi tutto qual'è il valore di quella porzione di superficie cilindrica che si projetta in n, r, e (II). Sia ζ questa superficie: è certo che essa sarà uguale all' intera superficie del cilindro che si projetta in $nd'er$, meno la parte ND'E che si projetta in $nd'e$, e ch'è precisamente la crociera. Avremo dunque dalla formula generale del II

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_p^P dx \int_q^Q \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2} =$$

$$\zeta + \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_{\frac{a}{b}y}^{P-p} dx \int_q^Q \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}$$

ossia

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\left(\mathrm{P}-p\right)\int_q^{\mathrm{Q}}\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}=$$

$$\zeta+\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}(\mathrm{P}-p)\int_q^{\mathrm{Q}}\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}-\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{b}\int_q^{\mathrm{Q}}\frac{ydy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}$$

dal che si deduce

$$\zeta=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{b}\int_q^{\mathrm{Q}}\frac{ydy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}$$

Val quanto dire che la porzione di superficie cilindrica che si projetta in *nre* è precisamente uguale alla parte algebrica delle espressioni (1) ... (16) ch' è stata sempre nettamente distinta dalla parte trascendente. In pratica non può darsi il caso di usare tali espressioni. Uno *schifo* intero montante ripugna; mezzo può convenire in qualche caso.

Ma quando le crociere sono orizzontali ossia

$$h=0$$

allora gli *schifi* sono in genere espressi da

$$\mathrm{Z}=4(\zeta+\zeta')=\frac{4a}{b}\int_q^{\mathrm{Q}}\frac{ydy}{\sqrt{b^2-y^2}}\sqrt{b^2-m^2y^2}$$

$$+\frac{4b}{a}\int_p^{\mathrm{P}}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-m^2x^2} \qquad (k^{\mathrm{vi}})$$

e il loro uso è frequentissimo nella pratica. I vari valori che prende la formola (k^{vi}) sono tutti particolareggiati nella parte algebrica delle precedenti formule (17)...(32); nè mette il conto di qui ripeterli colla sola differenza del segno.

Ravenna 31 Marzo 1866.



RISOLUZIONE DEL PROBLEMA:

RIPORTARE I PUNTI DI UNA SUPERFICIE SOPRA UN PIANO IN MODO CHE LE LINEE GEODETICHE VENGANO RAPPRESENTATE DA LINEE RETTE

DEL PROF. E. BELTRAMI.

I.

Nella maggior parte delle ricerche che sono state fin qui istituite dai geometri intorno alla teoria delle carte geografiche, si sono prese le mosse o dal principio della conservazione degli angoli (cioè della similitudine fra le figure infinitesime), o da quello della conservazione dei rapporti d'area.

Benchè questi due principii sieno da riguardarsi come i più semplici ed i più importanti, può darsi tuttavia il caso che se ne debba prescindere, per adottarne qualche altro più rispondente al fine speciale della carta che si vuol costruire.

Così, se la carta dovesse principalmente servire alla misura delle distanze, converrebbe escludere quelle projezioni per le quali le curve di minima distanza sulla superficie terrestre venissero ad essere rappresentate da linee troppo sensibilmente diverse dalla retta. Fra quelle considerate fin qui, la sola projezione centrale nella sfera ha la proprietà di trasformare in linee rette le curve summenzionate; e LAGRANGE riguarda a ragione questa proprietà come un pregio speciale di essa (*).

Siccome, fra le proprietà di cui può essere dotata una carta, quella di prestarsi alla facile misura delle distanze non è certamente la meno utile, così io aveva pensato che la risoluzione generale del problema formulato nel titolo di questo scritto potrebbe essere di qualche giovamento. Oltre la sua applicazione alla teoria delle carte geografiche, essa mi sembrava promettere un nuovo metodo di calcolo geodetico, nel quale tutte le quistioni relative a triangoli formati da linee geodetiche sopra una superficie sarebbero ridotte a semplici quistioni di trigonometria piana.

(*) Nelle *Memorie di Berlino* per l'anno 1779.

Ma l' investigazione da me istituita in proposito mi ha condotto a riconoscere che il detto problema non ammette una risoluzione generale, e che il caso della projezione centrale nella sfera è sostanzialmente il solo nel quale sia realizzabile la condizione prescritta.

La singolarità di questo risultato mi sembrò atta a giustificare la pubblicazione delle mie ricerche su questo soggetto, quantunque ne risulti dimostrata l' impossibilità di raggiungere pienamente lo scopo pel quale esse vennero iniziate.

II.

Sieno x, y le coordinate rettilinee dei punti del piano, non importa se rettangolari od oblique; X, Y le coordinate curvilinee dei punti corrispondenti della superficie. Supposto che sia possibile soddisfare alle condizioni del problema, le x, y saranno legate alle X, Y da due relazioni

$$x = u\,(X, Y), \qquad y = v\,(X, Y),$$

la natura delle quali dovrà esser tale che ad una retta qualunque del piano

$$ax + by + c = 0,$$

corrisponda sulla superficie una linea geodetica. Ora l' equazione in coordinate curvilinee della curva corrispondente a questa retta è evidentemente

$$au\,(X, Y) + bv\,(X, Y) + c = 0;$$

bisognerà dunque che quest' equazione rappresenti una linea geodetica, ovvero che, riguardando le a, b, c come costanti arbitrarie, essa rappresenti l' integrale completo dell' equazione delle linee geodetiche.

Ma nulla impedisce di riguardare come coordinate curvilinee della superficie le stesse funzioni $u\,(X, Y)$, $v\,(X, Y)$, anzichè le X, Y. Quindi è chiaro che il nostro problema si riduce a trovare come e quando sia possibile integrare l'equazione delle linee geodetiche per mezzo della relazione lineare

$$au + bv + c = 0,$$

o, ciò che torna allo stesso, come e quando l' equazione differenziale delle linee geodetiche sia riducibile alla forma

$$(1) \qquad du\, d^2v - dv\, d^2u = 0.$$

Trovate le superficie e le variabili per le quali ciò abbia luogo, basterà porre

$$x = u\,, \qquad y = v\,,$$

od anche

$$x = au + bv + c\,, \qquad y = a'u + b'v + c',$$

od anche più in generale

$$x = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}\,, \qquad y = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}\,.$$

Queste ultime formole corrispondono ad una trasformazione omografica della figura rappresentata dalle formole $x = u$, $y = v$.

III.

Per trovare le condizioni sotto le quali l'equazione differenziale delle linee geodetiche è riducibile alla forma (1), rammentiamo che, rappresentando al solito con

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare della superficie, la suddetta equazione differenziale è la seguente:

$$0 = (EG - F^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u)$$

$$+ (Edu + Fdv)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right\}$$

$$- (Fdu + Gdv)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}dv\,du + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2\right\} \text{ (*)}.$$

Dovendosi annullare i coefficienti di du^3, du^2dv, $dudv^2$, dv^3 si avranno queste quat-

(*) Veggasi per es. l'articolo XXI delle mie *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* nel Giornale di Napoli, tom. III.

tro condizioni:

$$(2)\qquad E\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}=0\,,$$

$$(3)\qquad E\frac{\partial E}{\partial u}+F\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}=0,$$

$$(4)\qquad G\frac{\partial E}{\partial v}+F\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-F\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}=0,$$

$$(5)\qquad G\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}=0.$$

Il nostro problema dipende adunque dalla integrazione simultanea di queste equazioni, e poichè il loro numero è maggiore di quello delle funzioni da determinare, si può già prevedere l'impossibilità di risolverlo generalmente.

IV.

La (2) e la (5) si possono mettere sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

e quindi esprimono che i due binomii

$$(6)\qquad \frac{E\,du+F\,dv}{\sqrt{E}}\,,\qquad \frac{F\,du+G\,dv}{\sqrt{G}}$$

devono essere differenziali esatti a due variabili.

È bene osservare che queste due equazioni non impongono alla superficie veruna condizione speciale. Infatti, annullandosi per esse i coefficienti di du^3 e dv^3 nell'equazione differenziale delle linee geodetiche, l'equazione stessa è soddisfatta tanto per $du=0$, quanto per $dv=0$, il che significa semplicemente che le linee coordinate $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ devono essere geodetiche. Ciò si deduce anche dalle note espressioni delle curvature geodetiche relative alle linee $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$, le quali sono annullate dalle (2) (5) (come si può vedere nelle citate *Ricerche*, eq. (60)).

V.

Consideriamo ora le (4) (5). Eliminando $\frac{\partial E}{\partial v}$ fra la (2) e la (3), e $\frac{\partial G}{\partial u}$ fra la (5) e la (4), si ottengono le due equazioni:

$$E\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{3F^2}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}=0,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{3F^2}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}=0,$$

che hanno il vantaggio di contenere le derivate relative ad una sola variabile.

L' eliminazione effettuata è sempre possibile. Infatti quand' anche, per una determinata scelta delle variabili, le due derivate $\frac{\partial E}{\partial v}$, $\frac{\partial G}{\partial u}$ fossero nulle, cesserebbero d'essere tali surrogando alle u, v le nuove variabili $au+bv+c$, $a'u+b'v+c'$, surrogazione che non altera punto le condizioni del problema.

Si può verificare facilmente che le due precedenti equazioni sono riducibili alla forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EG-F^2}{E\sqrt{E}}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EG-F^2}{G\sqrt{G}}\right)=0,$$

laonde se indichiamo con U, V due funzioni da determinarsi, la prima della sola u, la seconda della sola v, possiamo porre

$$(7) \qquad \frac{EG-F^2}{E\sqrt{E}}=V^3, \qquad \frac{EG-F^2}{G\sqrt{G}}=U^3.$$

Bisogna ora vedere se sia possibile determinare le U, V in modo che i due binomii (6) diventino differenziali esatti.

VI.

Introducendo una funzione incognita di u e di v, che diremo λ, possiamo soddisfare alle (7) ponendo

$$(8) \qquad \sqrt{E}=\lambda U, \qquad F=\lambda\mu UV, \qquad \sqrt{G}=\lambda V,$$

dove si è fatto per brevità

$$(9) \qquad \mu=\sqrt{\lambda(\lambda-UV)}.$$

I due binomii (6) diverranno

$$\lambda \mathrm{U} du + \mu \mathrm{V} dv\,, \qquad \mu \mathrm{U} du + \lambda \mathrm{V} dv$$

o più semplicemente

$$\lambda du_1 + \mu dv_1\,, \qquad \mu du_1 + \lambda dv_1\,:$$

ponendo

(10) $$du_1 = \mathrm{U} du\,, \qquad dv_1 = \mathrm{V} dv\,,$$

ed immaginando sostituite le u_1, v_1 alle u, v tanto nelle funzioni λ, μ quanto nelle U, V.

Le condizioni per l'integrabilità dei due ultimi binomii sono

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v_1} = \frac{\partial\mu}{\partial u_1}\,, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial\mu}{\partial v_1}\,.$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial(\lambda + \mu)}{\partial u_1} - \frac{\partial(\lambda + \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda - \mu)}{\partial u_1} + \frac{\partial(\lambda - \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

e quindi integrando

$$\lambda + \mu = 2\varphi(u_1 + v_1)\,,$$

$$\lambda - \mu = 2\psi(u_1 - v_1)\,,$$

dove φ, ψ sono caratteristiche di funzioni arbitrarie.

Ponendo finalmente

(11) $$u_1 + v_1 = \alpha\,, \qquad u_1 - v_1 = \beta$$

si ha

(12) $$\lambda = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)\,, \qquad \mu = \varphi(\alpha) - \psi(\beta).$$

VII.

Restano ora a determinare le φ, ψ, U, V in modo che risulti soddisfatta la (9), ossia la

$$\lambda \mathrm{UV} = \lambda^2 - \mu^2\,,$$

cioè, per le (12),

$$(\varphi + \psi)\,\mathrm{UV} = 4\varphi\psi.$$

Per tal uopo poniamo

$$(13) \qquad \varphi = \frac{1}{\Phi}, \qquad \psi = \frac{1}{\Psi}$$

talchè la precedente equazione diventerà

$$(14) \qquad \Phi(\alpha) + \Psi(\beta) = \frac{4}{UV},$$

donde

$$\log(\Phi + \Psi) = \log 4 - \log U - \log V.$$

Ora U è funzione di u_1 ossia di $\frac{\alpha+\beta}{2}$, V è funzione di v_1 ossia di $\frac{\alpha-\beta}{2}$, quindi il secondo membro è della forma

$$f(\alpha+\beta) + F(\alpha-\beta)$$

epperò soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} = 0,$$

alla quale deve quindi soddisfare anche il primo membro. Si ottiene così

$$(\Phi+\Psi)\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = (\Phi+\Psi)\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2,$$

ossia

$$(15) \qquad \Phi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \Psi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = A(\alpha) - B(\beta),$$

ponendo

$$\Phi\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = A(\alpha),$$

$$\Psi\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2 = B(\beta).$$

Finalmente derivando la (15) due volte di seguito prima rispetto ad α, poi rispetto a β, si ha

$$(16) \qquad \frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d^3\Psi}{d\beta^3} - \frac{d\Psi}{d\beta}\frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = 0.$$

Se nessuna delle quattro quantità che entrano in quest'equazione è nulla, è chiaro che l'indipendenza delle variabili α e β richiede necessariamente che sia

$$(17) \qquad \frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = r^2\frac{d\Phi}{d\alpha}, \qquad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3} = r^2\frac{d\Psi}{d\beta},$$

dove r è una costante reale od immaginaria della forma $r'i$, ma sempre differente da zero.

Se invece qualcuna di quelle quantità è nulla si dovrà porre

$$(17') \qquad \frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = 0, \qquad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3} = 0,$$

quando nessuna delle derivate prime è nulla; oppure

$$(17'') \qquad \Psi = \text{cost.}$$

quando una delle derivate prime, per es. quella di Ψ, è nulla.

Se fossero costanti ambedue le funzioni Φ, Ψ, la superficie risulterebbe sviluppabile. Noi non ci occuperemo punto di questo caso, per sè stesso evidente.

VIII.

Consideriamo dapprima le (17) dalle quali si deduce

$$\Phi(\alpha) = A_0 + A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha},$$

$$\Psi(\beta) = B_0 + B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta},$$

donde

$$A(\alpha) = r^2 \{ A_0 (A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha}) + 4A_1A_2 \},$$

$$B(\beta) = r^2 \{ B_0 (B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta}) + 4B_1B_2 \},$$

valori che riducono l'equazione (15) alla seguente:

$$0 = r^2 \{ (A_0 + B_0)(A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha} - B_1 e^{r\beta} - B_2 e^{-r\beta}) + 4(A_1A_2 - B_1B_2) \}.$$

Essendo r diverso da zero bisogna dunque porre

$$A_0 + B_0 = 0, \qquad A_1A_2 = B_1B_2,$$

condizioni alle quali si può soddisfare cambiando le costanti e ponendo

$$A_0 = -B_0 = -2h, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = kk'A,$$

$$B_1 = k'A, \qquad B_2 = kA,$$

nel qual modo si avrà:

$$(18) \qquad \begin{cases} \Phi = A(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h, \\ \Psi = A(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h. \end{cases}$$

Così tutte le condizioni imposte dal problema alle funzioni Φ, Ψ sono soddisfatte.

IX.

Bisogna ora determinare le U, V.

Per tal uopo osserviamo che si ha

$$\Phi + \Psi = \mathrm{A}\,(1 + ke^{-r(\alpha+\beta)})\,(e^{r\alpha} + k'e^{r\beta}),$$

e riponendo le variabili u_1, v_1 in luogo delle α, β mediante le (11)

$$\Phi + \Psi = \mathrm{A}\,(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})\,(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1}).$$

Confrontando quest'equazione colla (14) si vede doversi porre

$$(19) \qquad \mathrm{U} = \frac{2}{m\,(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})}, \qquad \mathrm{V} = \frac{2}{m'\,(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1})},$$

purchè si faccia $\mathrm{A} = mm'$.

Si avrà poscia, per le (13),

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{mm'\,(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h}, \\ \psi(\beta) &= \frac{1}{mm'\,(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h}, \end{aligned} \right.$$

e finalmente dalle (8):

$$(21) \qquad \mathrm{E} = (\varphi + \psi)^2\,\mathrm{U}^2, \quad \mathrm{F} = (\varphi^2 - \psi^2)\,\mathrm{UV}, \quad \mathrm{G} = (\varphi + \psi)^2\,\mathrm{V}^2.$$

X.

Prima di dedurre dai risultati precedenti la forma finale delle E, F, G espresse per u, v, osserviamo che dalle (21) si deduce:

$$ds^2 = (\varphi + \psi)\,\{\varphi\,(\mathrm{U}du + \mathrm{V}dv)^2 + \psi\,(\mathrm{U}du - \mathrm{V}dv)^2\},$$

ossia, per le (10), (11)

$$(22) \qquad ds^2 = (\varphi + \psi)\,(\varphi d\alpha^2 + \psi d\beta^2).$$

Questo risultato c'insegna che le α, β sono coordinate isoterme della superficie, e che la forma dell'elemento lineare ad esse corrispondente è una di quelle che danno luogo all'integrazione completa del problema delle linee geodetiche, come dimostrarono i Sig. Liouville e Brioschi.

Ma l' equazione (22) è suscettibile di una ulteriore trasformazione. Infatti il suo secondo membro può riguardarsi come il prodotto di due somme di quadrati e può quindi, colla nota regola, esser messo sotto la forma di una somma di due quadrati, nel modo seguente:

$$ds^2 = (\varphi d\alpha \pm \psi d\beta)^2 + \varphi\psi\,(d\alpha \mp d\beta)\,.$$

Quindi se si pone

(21) $$\varphi d\alpha - \psi d\beta = dt\,, \qquad \varphi d\alpha + \psi d\beta = d\tau$$

si hanno le due espressioni

(22) $$ds^2 = dt^2 + 4\varphi\psi\, du_1^2 = d\tau^2 + 4\varphi\psi dv_1^2\,,$$

le quali insegnano che le linee geodetiche $u_1 =$ cost., $v_1 =$ cost. hanno per trajettorie ortogonali le linee $t =$ cost., $\tau =$ cost. rispettivamente.

XI.

Veniamo ora alla determinazione delle E, F, G, in funzione delle u, v.

Dalle (10) si ha:

$$u = \int\frac{du_1}{U}\,, \qquad v = \int\frac{dv_1}{V}\,,$$

quindi, viste le (19),

$$u = \frac{m}{2r}\left(e^{ru_1} - ke^{-ru_1}\right)\,, \qquad v = \frac{m'}{2r}\left(e^{rv_1} - k'e^{-rv_1}\right)\,,$$

ommettendo per semplicità le costanti d' integrazione, che si possono riguardare come implicite in u, v.

Dai valori precedenti si deduce

$$e^{ru_1} + ke^{-ru_1} = \frac{2\sqrt{r^2u^2 + km^2}}{m}\,,$$

$$e^{rv_1} + k'e^{-rv_1} = \frac{2\sqrt{r^2v^2 + k'm'^2}}{m'}\,,$$

talchè le espressioni di U, V in u, v, sono

$$U = \frac{1}{\sqrt{r^2u^2 + km^2}}\,, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{r^2v^2 + k'm'^2}}\,.$$

Inoltre ponendo

$$W^2 = (r^2u^2 + km^2)\,(r^2v^2 + k'm'^2)$$

si trova facilmente

$$e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha} = \frac{2(W + r^2uv)}{mm'},$$

$$k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta} = \frac{2(W - r^2uv)}{mm'},$$

e quindi (20)

$$2\varphi = \frac{1}{W + (r^2uv - h)}, \qquad 2\psi = \frac{1}{W - (r^2uv - h)},$$

Finalmente, cambiando km^2, $k'm'^2$ in k, k', ciò che è lecito ora che le costanti k, m non compajono più separate, e ponendo quindi

(23) $$W^2 = (r^2u^2 + k)(r^2v^2 + k'),$$

si trovano i valori seguenti

(24) $$\begin{cases} E = \dfrac{r^2v^2 + k'}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\[2ex] F = -\dfrac{r^2uv - h}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\[2ex] G = \dfrac{r^2u^2 + k}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^2}, \\[2ex] EG - F^2 = \dfrac{1}{[W^2 - (r^2uv - h)^2]^3}. \end{cases}$$

XII.

Dalle cose dette alla fine dell'art. II. risulta che alle variabili u, v soddisfacenti al problema possono essere surrogate altre variabili legate linearmente ad esse, senza che le condizioni del problema vengano mutate. Poichè dunque le formole (24) danno una soluzione del problema, bisogna che in particolare ogni sostituzione della forma

$$u = au' + bv', \qquad v = a'u' + b'v'$$

lasci inalterata la composizione di quelle formole.

Verifichiamo questa proprietà.

Rappresentando con

$$ds^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

la nuova espressione dell' elemento lineare, si ha

$$E' = Ea^2 + 2Faa' + Ga'^2,$$

$$F' = Eab + F(ab' + a'b) + Ga'b',$$

$$G' = Eb^2 + 2Fbb' + Gb'^2.$$

Quindi ponendo per brevità

$$\frac{k'a^2 + 2haa' + ka'^2}{(ab' - a'b)^2} = K',$$

$$\frac{k'ab + h(ab' + a'b) + ka'b'}{(ab' - a'b)^2} = H,$$

$$\frac{k'b^2 + 2hbb' + kb'^2}{(ab' - a'b)^2} = K,$$

si trova:

$$E' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 v'^2 + K')}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2},$$

$$F' = -\frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 u'v' - H)}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2},$$

$$G' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 u'^2 + K)}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2}.$$

Ma è noto che si ha

$$E'G' - F'^2 = (a'b - ab')^2 (EG - F^2),$$

quindi, ponendo

$$W'^2 = (r^2 u'^2 + K)(r^2 v'^2 + K'),$$

si ha
$$W^2 - (r^2 uv - h)^2 = (ab' - a'b)^2 \{ W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2 \},$$

epperò:

$$E' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 v'^2 + K'}{[W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2]^2},$$

$$F' = \frac{-1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 u'v' - H}{[W'^2 - (r^2 u'^2 + H)^2]^2}$$

$$G' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 u'^2 - K}{[W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2]^2}.$$

Ora egli è evidente che queste espressioni hanno la stessa forma delle (24) e ne differiscono soltanto in ciò che alle costanti r^2, h, k, k' si trovano sostituite le

$$\mu r^2, \quad \mu H, \quad \mu K, \quad \mu K', \qquad \text{dove} \qquad \mu = (ab' - a'b)^{\frac{2}{3}}.$$

Dunque la proprietà in discorso è realmente verificata.

XIII.

Disponiamo delle costanti a, b, a', b' talmente da rendere

$$H = 0, \qquad K = K',$$

ciò che è sempre possibile, ed in molti modi, quando non si escludano valori immaginarii di quei coefficienti.

Osservando che in tal caso si ha

$$W'^2 - (r^2u'v' - H)^2 = K(r^2u'^2 + r^2v'^2 + K),$$

si trova

$$E' = \frac{r^2v'^2 + K}{\mu^3K^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + K)^2},$$

$$F' = \frac{-r^2u'v'}{\mu^3K^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + K)^2},$$

$$G' = \frac{r^2u'^2 + K}{\mu^3K^2(r^2u'^2 + r^2v'^2 + K)^2}.$$

Poniamo finalmente, per maggiore semplicità

$$\frac{K}{r^2} = a^2, \qquad \frac{1}{\mu^3Kr^2} = R^2,$$

e scriviamo u, v in luogo di u', v': avremo

$$(25) \qquad \begin{cases} E = \dfrac{R^2(v^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\[2ex] F = \dfrac{-R^2uv}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\[2ex] G = \dfrac{R^2(u^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}. \end{cases}$$

XIV.

Abbiamo per tal modo determinata la forma dell' elemento lineare della superficie, vale a dire individuata una classe di superficie, tutte applicabili l' una sull'altra e tutte soddisfacenti al problema proposto

Per formarsi un' idea della natura comune di tutte queste superficie bisogna dunque fare appello alle proprietà *assolute,* prima delle quali è la misura della curvatura, data dalla formola:

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\} \quad (*)$$

ovvero, nel caso nostro, vista la (8), (2)

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

Ponendo per un momento

$$\Delta^2 = u^2 + v^2 + a^2$$

si trova

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2R^2(\Delta^2-2u^2)v}{\Delta^6}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{2R^2(\Delta^2-2v^2)u}{\Delta^6}$$

donde

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} = -\frac{2a}{v^2+a^2}\frac{\partial \Delta}{\partial u};$$

quindi

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{1}{R^2}\frac{\Delta^3}{v^2+a^2}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Dunque le nostre superficie sono quelle di curvatura costante. In particolare, se R è quantità reale, le formole (25) competono a tutte le superficie applicabili sulla sfera di raggio R.

(*) Veggasi per. es. l'art. XXIV delle citate mie *Ricerche.*

XV.

È noto che le espressioni finite in u, v delle coordinate ordinarie X, Y, Z relative alle superficie di curvatura costante non sono ancora state determinate in generale. Quelle relative alla superficie sferica tipo sono le seguenti:

$$X = \alpha + \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Y = \beta + \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Z = \gamma + \frac{Ra}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

donde eliminando u, v, si trae:

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = R^2,$$

α, β, γ essendo costanti arbitrarie. Infatti le precedenti espressioni danno:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 =$$

$$= \frac{R^2 \{ (v^2 + a^2)\, du^2 - 2uv du dv + (u^2 + a^2)\, dv^2 \}}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$$

donde si deducono per E, F, G i valori precedenti.

Le u, v hanno un significato geometrico semplicissimo.

Infatti trasportiamo il centro della sfera nel punto di coordinate $X = 0$, $Y = 0$, $Z = + a$, talchè si avrà

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}} \\ Y &= \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}}, \\ Z &= \frac{Ra}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}} - a. \end{aligned} \right.$$

Il raggio passante pel punto (X, Y, Z) è rappresentato dalle equazioni.

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta + a}{Z + a},$$

epperò le coordinate del suo punto d'incontro col piano XY sono

$$\xi = \frac{aX}{Z+a}, \qquad \eta = \frac{aY}{Z+a},$$

ossia per le (26),

$$\xi = u, \quad \eta = v.$$

Dunque le variabili u, v non sono altro che le coordinate rettangole della projezione centrale di quella sfera sulla quale tutte le nostre superficie sono applicabili, e questa projezione, insieme colle sue trasformazioni omografiche, costituisce l'unica soluzione del problema, almeno finchè si considerano le equazioni (17) dalle quali siamo partiti.

Vedremo ora che anche le equazioni (17') e (17") conducono alle medesime conclusioni. Ma per abbreviare il discorso ci contenteremo di dimostrare che anch'esse corrispondono a superficie di curvatura costante, senza punto risalire alle espressioni di E, F, G per u, v, che ognuno potrà facilmente ottenere procedendo in modo analogo a quello che si è usato or ora, e che si possono agevolmente ridurre alla medesima forma (26.)

XVI.

Incominciamo dalle (17'). Esse danno

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2,$$

$$\Psi = B_0 + B_1\beta + B_2\beta^2,$$

epperò la (15) diventa:

$$2(A_2+B_2)(A_1\alpha + A_2\alpha^2 - B_1\beta - B_2\beta^2) = 2(A_0+B_0)(A_0-B_2) - A_1^2 + B_1^2.$$

Porremo quindi

$$A_2 + B_0 = 0, \qquad 2(A_0+B_2)(A_2-B_2) = A_1^2 - B_1^2.$$

Quest'ultima relazione, in forza della precedente, può scriversi

$$4A_0A_2 - A_1^2 = 4B_0B_2 - B_1^2.$$

Se fosse $A_2 = B_0 = 0$, si avrebbe quindi

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha, \qquad \Psi = B_0 \pm A_1\beta$$

o più semplicemente

(27) $$\Phi = 2A\alpha, \qquad \Psi = \pm 2A\beta,$$

poichè in forza delle (10) (11) si può alle α, β aggiungere una costante.

Se invece A_2 e B_2 non sono nulli, si soddisfarà alle condizioni trovate ponendo

$$\Phi = A\{(\alpha-a)^2-c^2\}, \qquad \Psi = -A\{(\beta-b)^2-c^2\},$$

o più semplicemente

(27') $$\Phi = A(\alpha^2-c^2), \qquad \Psi = -A(\beta^2-c^2).$$

1°) Nel caso delle formole (27) si ha dalle (13)

$$\varphi = \frac{1}{2A\alpha}, \qquad \psi = \pm\frac{1}{2A\beta}$$

$$\varphi d\alpha \mp \psi d\beta = \frac{1}{2A}\left(\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{d\beta}{\beta}\right).$$

Scrivendo dunque indifferentemente t per τ (ved. le eq. (21)) si ha

$$t = \frac{1}{2A}\log\frac{\alpha}{\beta}$$

donde $$u_1 \operatorname{sen} hAt = v_1 \cos hAt.$$

Quando si prende il segno superiore si ha

$$\alpha = u_1(1+tghAt), \beta = u_1(1-tghAt),$$

$$\varphi\psi = \left(\frac{\cos hAt}{2Au_1}\right)^2,$$

epperò

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\cos hAt}{A}\right)^2 (d\log u_1)^2.$$

Prendendo invece il segno inferiore ed esprimendo α, β per v_1 si trova

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} hAt}{A}\right)^2 (d\log v_1)^2.$$

Ora, quando l'elemento lineare di una superficie ha la forma

$$du^2 + Gdv^2,$$

la misura della curvatura è espressa da

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Dunque le due forme precedenti convengono entrambe ad una superficie di curvatura costante $= -A^2$. Nella prima A dev' essere reale, ma nella seconda può essere immaginario della forma iA'. In questo secondo caso la superficie è applicabile sulla sfera di raggio $\frac{1}{A'}$.

2°) Adottando le formole (27') si ha

$$\varphi = \frac{1}{A(\alpha^2 - c^2)}, \qquad \psi = \frac{-1}{A(\beta^2 - c^2)}$$

quindi

$$t = \frac{1}{2Ac} \log \frac{\alpha\beta + c^2 - c(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + c^2 + c(\alpha + \beta)},$$

ossia

$$\frac{u_1^2 - v_1^2 + c^2 - 2cu_1}{u_1^2 - v_1^2 + c^2 + 2cu_1} = e^{2Act}$$

donde

$$v_1 = \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2},$$

$$\alpha = u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2},$$

$$\beta = u_1 - \sqrt{u_1^2 + 2cu_1 \cot hAct + c^2}.$$

Sostituendo questi valori in φ e ψ si trova

$$4\varphi\psi = -\frac{\operatorname{sen} h^2 Act}{A^2 c^2 u_1^2},$$

e quindi scrivendo A in luogo di Ac,

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} hAt}{A}\right)^2 (d \log u_1)^2.$$

Questa forma dell'elemento lineare corrisponde di nuovo ad una superficie di curvatura costante $= -A^2$.

XVII.

Consideriamo finalmente la soluzione data dalla (17'). Essa rientra in quella che abbiamo dedotta dalla (17). Infatti chiamiamo $2h$ il valore costante di Ψ: sostituendolo nella (15) troveremo

$$(\Phi + 2h)\,\Phi''(\alpha) - \Phi'(\alpha)^2 = 0,$$

donde

$$\Phi = Ae^{r\alpha} - 2h,$$

essendo A, r costanti arbitrarie. Ora questi valori di Φ, Ψ si possono dedurre dai valori (18) ponendo $k = k' = 0$. Non è dunque necessario sviluppare ulteriormente questo caso.

XVIII.

Dalle cose esposte emerge pienamente dimostrato il seguente teorema:

Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall' ordinaria omografia (*). *Quando non è nulla, questa legge è riducibile alla projezione centrale nella sfera ed alle sue trasformazioni omografiche.*

Siccome fra tutte le superficie di curvatura costante, la sola che possa ricevere applicazioni nella teoria delle carte geografiche e nella geodesia è probabilmente la superficie sferica, così dal punto di vista di queste applicazioni viene in tal modo ad essere confermato quello che si asserì in principio, cioè che la sola soluzione del problema è fornita in sostanza dalla projezione centrale.

A rimuovere tuttavia ogni equivoco circa l' estensione ed il significato del precedente teorema sono necessarie due osservazioni.

Primieramente si deve rammentare che gli elementi primitivi della corrispondenza considerata sono i *punti*, così della superficie come del piano. Se si volessero unicamente far corrispondere le rette del piano alle linee geodetiche della superficie la quistione diventerebbe assolutamente diversa e non imporrebbe condizione alcuna alla natura della superficie. Infatti rappresentando con

$$f(u, v, a, b) = 0$$

l' equazione integrale delle linee geodetiche sulla superficie considerata, e con

$$y = Ax + B$$

quella di una retta del piano, basterebbe stabilire due relazioni fra le A, B, a, b, con che ad ogni geodetica corrisponderebbe una retta e viceversa. Ma è chiaro che in questo modo ad un punto della superficie, considerato come intersezione delle geodetiche uscenti da esso, corrisponderebbe sul piano l' inviluppo delle rette corrispon-

(*) Cioè distendendo la superficie sopra un piano, si ottiene una figura omografica colla rappresentazione.

denti. E soltanto nel caso in cui si prescrivesse che quest' inviluppo dovesse ridursi a un punto, si ricadrebbe sulla quistione trattata precedentemente, e quindi sulle limitazioni ad essa inerenti.

La seconda avvertenza è relativa alla generalizzazione di cui è suscettibile l'enunciato del nostro problema, vale a dire: *riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda*. La soluzione di questo problema più generale non è punto deducibile da quella del caso già considerato, come lo è per es. quando la proprietà caratteristica della corrispondenza è la similitudine delle parti infinitesime o la conservazione dei rapporti d' area. La sola estensione che si può dare legittimamente al nostro teorema è questa: *Affinchè i punti di una superficie possano essere riportati sopra una superficie di curvatura costante, in modo che le linee geodetiche di quella sieno rappresentate da linee geodetiche di questa, è necessario e sufficiente che anche la prima superficie abbia la curvatura costante.*

Pisa 31 Maggio 1866.



SULLE SUPERFICIE GOBBE

NELLE QUALI

UNO DEI DUE RAGGI DI CURVATURA PRINCIPALE

È UNA FUNZIONE DELL'ALTRO

NOTA

DI ULISSE DINI

1. Nell'ultimo fascicolo di questi Annali il Prof. Beltrami ha risoluto il problema avente per oggetto la ricerca di tutte le superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura è una funzione dell'altro, e in una Nota ha gentilmente indicato come io, all'insaputa dei risultati ottenuti da Lui, mi fossi proposto la stessa questione e l'avessi pure risoluta con un metodo del tutto differente dal suo. Poichè questo metodo mi sembra non privo di una certa eleganza e semplicità, credo bene di darne ora qui la pubblicazione.

Sia

$$F(\rho, \rho') = 0 \tag{1}$$

la relazione che lega i due raggi di curvatura principale di una superficie.

È chiaro che, a meno che essa non sia appunto una delle due

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{cost}, \qquad \frac{1}{\rho\rho'} = \text{cost}, \tag{2}$$

potremo dedurne

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \varphi(\rho), \qquad \frac{1}{\rho\rho'} = \varphi_1(\rho).,$$

e quindi per tutte le superficie nelle quali i due raggi di curvatura principale sono legati da una certa relazione, ad eccezione delle (2), si avrà

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \psi\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right) = \psi_1\left(\frac{1}{\sqrt{-\rho\rho'}}\right)$$

ovvero

$$H = \psi_1 (K),$$

ponendo

$$H = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}, \qquad K = \frac{1}{\sqrt{-\rho\rho'}}.$$

Se dunque si suppone che H e K vengano espresse per due variabili indipendenti u e v, si avrà, eliminando il ψ_1,

$$(3) \qquad \frac{dH}{du}\frac{dK}{dv} = \frac{dH}{dv}\frac{dK}{du}.$$

e questa dovrà essere identicamente soddisfatta per tutte le superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell' altro, non escluse le (2), giacchè per queste si ha

$$\frac{dH}{du} = \frac{dH}{dv} = 0, \qquad \frac{dK}{du} = \frac{dK}{dv} = 0.$$

Nelle superficie gobbe H esprime la curvatura della sezione normale perpendicolare alla generatrice, e K la curvatura della superficie; il nostro problema si riduce dunque a determinare le superficie gobbe per le quali questi due elementi rendono identica la (3).

Ricordiamo ora che se v e u sono le variabili che determinano su una superficie gobba le generatrici e le loro trajettorie ortogonali, talchè sia

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + \{ (u - \alpha)^2 + \beta^2 \} dv^2,$$

ove α e β sono due funzioni di v, si ha (*)

$$(5) \begin{cases} H = -\lambda \frac{1}{g} - \frac{\beta'(u-\alpha) + \beta\alpha'}{g^3}, \\ K = \frac{\beta}{g^2}, \end{cases}$$

ove

$$g^2 = (u - \alpha)^2 + \beta^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{dv_1}{dv},$$

(*) Vedi Bour theorie de la deformation des surfaces — Journal de l'École Polyt. 1862. pag. 24, 46.

essendo dv_1 l'angolo che la perpendicolare comune a due generatrici infinitamente vicine fa colla sua posizione successiva, e che conseguentemente dipende soltanto da v.

Dietro queste formole è chiaro che la questione si riduce a determinare λ, α, e β in modo che la equazione (3) resti soddisfatta pei valori (5) di H e K. Ora questa equazione diviene

$$\{ \lambda(u - \alpha) g^2 + 2\beta' (u - \alpha)^3 + 3\beta\alpha' (u - \alpha) - \beta'\beta^2 \}$$
$$\{ \beta' (u - \alpha)^2 + 2\beta\alpha' (u - \alpha) - \beta'\beta^2 \} =$$
$$- 2 [- \lambda' g^4 + \lambda g^2 \beta\beta' - \lambda g^2 (u - \alpha) \alpha' - \beta'' (u - \alpha) g^2 - \beta\alpha'' g^2$$
$$+ 3 \{ \beta' (u - \alpha) + \beta\alpha' \} \{ \beta\beta' - (u - \alpha) \alpha' \}] (u - \alpha) ,$$

e poichè deve essere identica dovrà esser soddisfatta anche per $u = \alpha$. Si avrà dunque

$$\beta^4 \beta'^2 = 0 ,$$

e poichè β non può essere zero, altrimenti la superficie sarebbe sviluppabile, se ne concluderà che $\beta' = 0$ e quindi

$$(6) \qquad \beta = c$$

essendo c una costante arbitraria.

Per questa condizione la equazione precedente diviene

$$\lambda' (u - \alpha)^2 + \lambda' \beta^2 + \beta\alpha'' = 0 ,$$

e, dovendo essere soddisfatta qualunque sia u, ci dà

$$(7) \qquad \alpha = av + b , \qquad \lambda = d ,$$

ove a, b, d sono tre nuove costanti.

Esaminiamo ora queste condizioni.

La (6) e la prima delle (7) ci dicono che per le superficie cercate si ha

$$ds^2 = du^2 + \{ (u - av - b)^2 + c^2 \} dv^2,$$

e poichè questa forma dell'elemento lineare conviene alle superficie applicabili sull'iperboloide gobbo di rivoluzione quando a è differente da zero, e a quelle applicabili sull'elicoide gobbo a piano direttore e a direttrice rettilinea quando $a = 0$, se ne concluderà che le superficie cercate sono nelle classi di quelle applicabili su queste due.

Per interpretare poi la 2ª delle (7) si osserverà che conducendo pel centro di una sfera di raggio uno, altrettanti raggi paralleli alle generatrici della superficie gobba si forma sulla sfera una curva gg' il cui arco misura l'angolo dv, e conducendo

dei raggi paralleli alle generatrici della superficie conjugata il loro angolo dv_1 misura l'angolo dei grandi cerchi della sfera tangente a gg' alle estremità di dv; dunque la curvatura geodetica c_g di gg' è data dalla formola

$$c_g = \frac{dv_1}{dv} = d = \text{cost},$$

e si ha perciò che gg' è un circolo, e il cono direttore delle superficie cercate è di rivoluzione, e ha per apertura θ, essendo

$$(8) \qquad \cot\theta = d.$$

Riunendo ora questo risultato al precedente se ne concluderà subito (*) che:

Le sole superficie gobbe nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro sono gli elicoidi.

Ponendo nella (5) per α, β, λ i loro valori (6) e (7) e eliminando g, si ha la relazione

$$(9) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\frac{d\sqrt{-\rho\rho' + a}}{c^{\frac{1}{2}}\left(-\rho\rho'\right)^{\frac{3}{4}}},$$

che lega i due raggi di curvatura principale degli elicoidi. In essa a, c, d sono costanti arbitrarie, ed è essa la sola relazione cui possono assoggettarsi i due raggi di curvatura di una superficie gobba per ogni punto di essa.

2. Questa formola conduce subito al noto teorema di *Meunier* sulla superficie rigata d'area minima, giacchè si vede che essa non può ridursi all'altra

$$\rho + \rho' = 0,$$

senza che si abbia $a = 0$, $d = 0$, cioè senza essere nel caso dell'elicoide gobbo a piano direttore e a direttrice rettilinea.

3. Per dedurre dalla relazione (9) quella relativa all'Iperboloide gobbo di rivoluzione conviene cercare il significato delle costanti a, c, d che entrano in essa.

Si sa che c è l'inversa del coefficiente di distribuzione dei piani tangenti della superficie e d, per la (8), è la cotangente dell'apertura del cono direttore: in quanto ad a poi si può osservare che, se i è l'inclinazione della elica di stringimento $u = av + b$ sulle generatrici, si ha

$$\cot i = \frac{du}{dv}\left(\frac{1}{g}\right)_{\text{—}} = \frac{a}{c},$$

(*) Bour loc. cit. pag. 69.

e quindi

$$a = c \cot i.$$

Il significato delle costanti a, c, d è dunque facilmente determinato (*). Ciò fatto, si osservi che essendo le generatrici di queste superficie tangenti al cilindro che contiene l'elica di stringimento, se si suppone $i = \frac{\pi}{2} - \theta$, e quindi $d = \frac{c}{a}$, quest'elica diviene un circolo e la superficie diviene di rivoluzione; e la relazione (9) si trasforma nell' altra

$$\left\{ \rho^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{2}} - (-\rho')^{\frac{1}{4}} a \right\} \left\{ \rho^{\frac{1}{4}} a + (-\rho')^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{2}} \right\} = 0$$

che si scinde in una delle due

$$\frac{\rho^3}{-\rho'} = \frac{a^4}{c^2} = \text{cost}, \qquad \frac{-\rho'^3}{\rho} = \frac{a^4}{c^2} = \text{cost}$$

che sappiamo verificarsi nelle superficie del second' ordine.

Si potrebbe pure vedere che l' iperboloide gobbo di rivoluzione è la sola superficie gobba nella quale si verifichino queste relazioni.

4. Mi piace or di notare come la relazione (9) dia luogo ad una rimarchevole proprietà degli elicoidi applicabili su quello gobbo a piano direttore e a direttrice rettilinea.

Si osservi che a e c sono le stesse per tutte gli elicoidi E' applicabili su uno stesso elicoide E, e per averli tutti basta far variare d da $-\infty$ a $+\infty$.

Per $a = 0$ si hanno quelli applicabili sull' elicoide gobbo a piano direttore e a direttrice rettilinea, e per quello corrispondente al cono direttore di apertura θ si ha

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\frac{\cot \theta}{c^{\frac{1}{2}}\left(-\rho\rho'\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Per un altro di questi elicoidi si avrà

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} = -\frac{\cot \theta'}{c^{\frac{1}{2}}\left(-\rho\rho'\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(*) Le costanti contenute nella formola data dal Sig. Beltrami hanno un significato differente: però, servendosi delle formole del §. 2. della Memoria dello stesso Sig. Beltrami *sulla flessione delle superficie rigate*, queste costanti possono esprimersi per quelle, e così si trova anche la coincidenza delle due formole.

e quindi pei punti corrispondenti sarà

$$\frac{\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}}{\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho'_1}}=\frac{d}{d'}=\frac{\cot\theta}{\cot\theta'}=\text{cost.}$$

Si può dunque concludere che *quando si trasforma uno degli elicoidi applicabili su quello gobbo a piano direttore e a direttrice rettilinea in un altro elicoide, le curvature medie delle due superficie o,* che è lo stesso, *le curvature delle sezioni normali perpendicolari alle generatrici nei punti corrispondenti si mantengono proporzionali. Il rapporto costante di queste curvature è quello delle cotangenti delle aperture dei respettivi coni direttori.* Ciò poteva dedursi anche dalla formola del Sig. Beltrami. Da essa pel valore del rapporto in questione si troverebbe il rapporto delle curvature delle respettive eliche di stringimento.

È pure da notarsi che se la (9) è relativa a un elicoide E, la relazione che si ottiene dalla (9) stessa cangiando il segno di d e lasciando gli stessi a e c sarà relativa a un elicoide applicabile sul precedente e avente lo stesso cono direttore.

Pisa, Maggio 1866.



RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SUGLI ARCHI DI CICLOIDE

(ORDINARIA, ALLUNGATA ED ACCORCIATA).



1° Se nella cicloide ordinaria si prenda per asse delle ascisse il diametro del circolo generatore, che divide per metà l' intera cicloide e per asse delle ordinate una retta perpendicolare a quest' asse con l' origine nel punto, ove l'asse incontra la curva le sue equazioni saranno

$$x = a\,(1 - \cos u)\,, \qquad y = a\,(u + \operatorname{sen} u)$$

ove a è il raggio del circolo generatore, ed u un' angolo compreso fra 0, e π. È noto che un' arco della cicloide a partir dall' origine è sempre doppio della corrispondente corda del circolo, per cui la curva è perfettamente rettificabile e la sua lunghezza è quadrupla del diametro del circolo generatore. Quando la cicloide sia o allungata, od accorciata, la rettificazione dipende da un' arco ellittico, ossia da un trascendente ellittico di seconda specie, e la semicicloide in questione sarà espressa dal trascendente completo di seconda specie: È assai facile, quando siano stabilite l'equazioni della cicloide o allungata, od accorciata di verificare quanto si è detto, e solamente ci fermeremo un' istante su tale ricerca, da che la riporteremo primieramente ad un punto di storia.

2° Nell' anno 1773 fu stampata in Parma la seguente Opera: *Opuscula Mathematica auctore Petro Giannini*, la quale Opera presentemente è molto rara. Il secondo di questi opuscoli porta il titolo: *De Cycloide Contracta, ac Protracta.* Nella Prefazione il dotto Autore dice *Proprietatibus Cycloidum vulgarium inventis proprietates Cycloidum Contractarum, ac Protractarum investigatae Robervallius enim quadraturam, Paschalius vero Rectificationem earundem tradidit, at non pari elegantia id factum, quemadmodum in Cycloide vulgari. Constabit autem ex se-*

quentibus me incidisse in demonstrationes non inelegantes, Quadraturam praesertim ac Rectificationem harum Curvarum: difatti il citato Autore tanto con una dimostrazione sintetica, quanto con una dimostrazione analitica, giunge a dimostrare, che gli archi della Cicloide o allungata o accorciata si esprimono per archi ellittici. Presentemente si può ancora semplificare la dimostrazione analitica, e chiamando m una costante minore, o maggiore di uno, l'equazioni

$$x = a\,(1 - \cos u)\,, \qquad y = a\,(mu + \operatorname{sen} u)$$

apparterranno alle due cicloidi, e dalla differenziazione si ricava

$$dx = a \operatorname{sen} u du\,, \qquad dy = adu\,(m + \cos u)$$

quindi per la rettificazione sarà

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2du^2\,(1 + m^2 + 2m \cos u)$$

sostituendoci per brevità

$$\cos u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} u\,, \qquad \text{ed} \qquad \tfrac{1}{2} u = \varphi$$

ed
$$k^2 = \frac{4m}{(1+m)^2} < 1$$

si avrà
$$ds = 2a\,(1 + m)\,d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

Ed in fine per un'arco indefinito

$$s = 2a\,(1 + m) \int d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

il che dimostra la dipendenza di s da un'arco ellittico: per la semicicloide $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, e si avrebbe l'integrale definito completo.

$$S = 2a\,(1 + m) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

Nella cicloide ordinaria $m = 1$, e $k = 1$: l'integrazione si rende razionale, e si giunge ad una sua nota proprietà di sopra richiamata. Ad una medesima, ed identica formola di rettificazione si giunge, quando l'equazioni della cicloide si prendano sotto la forma

$$x = a\,(1 - m \cos u)\,, \qquad y = a\,(u + m \operatorname{sen} u)$$

Infatti dalla differenziazione ricaviamo

$$dx = ma \operatorname{sen} u du, \qquad dy = adu (1 + m \cos u).$$

d'onde $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 du^2 (1 + m^2 + 2m \cos u)$$

quale essendo identica alla precedente, ne risulterà una somigliante riduzione.

3.º Alle indicate curve cicloidali possiamo anche riportare un'altra specie di cicloide, della quale la sua rettificazione dipenda da archi circolari: Prendiamo la curva di equazioni

$$x = a (1 - \cos u), \qquad y = ma (u + \operatorname{sen} u).$$

e che per $m = 1$ si riduce alla ordinaria curva cicloidale: è noto che l'equazione finita sarà $$y = m \left(\sqrt{(2ax - x^2)} + a \text{ Arc sen} \left(\frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a} \right) \right)$$

come per l'equazione differenziale si avrà

$$dy = mdx \sqrt{\left(\frac{2a - x}{x} \right)}.$$

Di quì per il differenziale dell'arco, si trova

$$ds^2 = dx^2 \left(\frac{2am^2 - (m^2 - 1) x}{x} \right).$$

e ponendo per brevità $am^2 = (m^2 - 1) a_1$ otterremo

$$ds = \sqrt{m^2 - 1}.\, dx \sqrt{\frac{2a_1 - x}{x}}$$

la quale è del tutto somigliante all'equazione differenziale fra x, ed y, per cui l'equazione finita sarà evidentemente

$$s = \sqrt{m^2 - 1}. \left(\sqrt{(2a_1 x - x^2)} + a_1 \text{ Arc sen} \left(\frac{\sqrt{(2a_1 x - x^2)}}{a_1} \right) \right)$$

È dunque dimostrato che la rettificazione della nuova cicloide dipende da archi circolari. Nel caso particolare di $m^2 = 2$, abbiamo $a_1 = 2a$ ed il valore di s diviene

$$s = \sqrt{(4ax - x^2)} + 2a. \text{ Arc. sen} \left(\frac{\sqrt{(4ax - x^2)}}{2a} \right)$$

la quale rappresenta una cicloide di raggio $2a$, quando s si prendesse per ordinata: In questa curva poi corrisponde l' ordinata

$$y = \sqrt{2}.\left(\sqrt{(2ax - x^2)} + a.\ \text{Arc. sen}\left(\frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}\right)\right)$$

L'analogia di tali curve con la cicloide ordinaria fu già da me rimarcata da lungo tempo in una Memoria inserita nel giornale arcadico fin dal 1839 *Sul metodo inverso delle tangenti:* aggiungo che questa memoria tradotta in lingua Francese trovasi anche inserita nel tom. 26° del giornale di Crelle.

4.° Aggiungeremo in fine con riportare la soluzione di una questione relativa alla cicloide e che trovasi esposta nel fascicolo di Decembre 1865 *Nouvelles Annales de Mathematiques* par *MM. Gerono* et *Prouhet,* ed a pag. 555 si legge quanto segue:

Question 699 par *M. G. Répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.*

En partageant, dans un rapport constant les normales d'une cycloide quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie) on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse. Una tal questione fu proposta dal sig. Prof. Mannheim.

Ne trascriveremo qui la soluzione come viene esposta nella citata opera.

Una cicloide qualunque ha per equazioni

$$y - a = b\cos u, \qquad x - au = b\ \text{sen}\ u$$

Fra le coordinate di un punto (x, y) di questa curva, e quelle (η, ξ) della linea in questione si ha la relazione

$$\frac{\eta}{y} = \frac{\xi - au}{x - au} = n$$

Differenziando le precedenti equazioni si ha

$$dy = -b\ \text{sen}\ udu, \qquad d\eta = ndy$$

$$dx = (a + b\cos u)\,du, \qquad d\xi = ndx + adu - nadu$$

e per conseguenza

$$d\eta = -nb\ \text{sen}\ udu, \qquad d\xi = (a + bn\cos u)\,du$$

D'onde

$$ds = du\sqrt{(a^2 + n^2b^2 + 2abn\cos u)}$$

$$= du\sqrt{((a + nb)^2 - 4abn\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}u)}$$

Poniamo $\frac{1}{2} u = \varphi$ avremo

$$ds = 2 (a + nb) d\varphi \sqrt{\left(1 - \frac{4abn}{(a + nb)^2} \operatorname{sen}^2\varphi\right)}$$

Ora un' arco ellittico ha per elemento differenziale

$$ds = a d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}$$

a è il semiasse maggiore, ed e l' eccentricità.

Nel nostro caso i semiassi A, B, e l' eccentricità E sono dati dai valori

$$A = 2 (a + nb), \qquad E^2 = \frac{4abn}{(a + nb)^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

quali sono soddisfatte, mentre

$$E^2 = \frac{16abn}{4 (a + nb)^2} = \frac{(2 (n + ab))^2 - (2 (n - ab))^2}{(2 (n + ab))^2}$$

L' articolo dei *nouvelles Annales* termina col fare osservare che la questione proposta dal sig. *Mannheim* fù dal medesimo risoluta con considerazioni geometriche in una Memoria, che trovasi inserita nel Cah. 40 della Scuola Politecnica. Avendo avuto occasione di citare l' opera del *Giannini,* per le Cicloidi, aggiungeremo che tre sono gli opuscoli contenuti. Cioè I° *De Hydraulica.* II. *De Cycloide contracta, ac protracta.* III° *De Sectione determinata.* Quest' ultimo interessa in modo speciale la Geometria. L' autore dopo la prefazione impiega due pagine delle quali il titolo è: *Descriptio operis Apollonii Pergaei de Sectione determinata ex Pappo.* L'opuscolo viene diviso in due parti, la prima contiene quarantatre Teoremi oltre a risoluzioni di problemi.

Roma 31 Decembre 1865.

Barnaba Tortolini.



PUBBLICAZIONI RECENTI

BATTAGLINI – Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2ª specie (dal Rend. dell'Accad.) – *Napoli* 1865.

GENOCCHI – Studi intorno ai casi d' integrazione sotto forma finita (dalle Mem. dell'Accad.) *Torino* 1865.

BALTZER – Elementi di Matematica, 1ª versione italiana fatta sulla 2ª edizione di Lipsia ed autorizzata dall' autore, per L. CREMONA. Parte 2ª Aritmetica generale *Genova* 1865 (Tipografia editrice del R. I de' Sordomuti).

BALTZER – Elementi ecc. ecc. Parte 3ª, Algebra.

A. FORTI – Lezioni elementari di Meccanica – *Milano* 1865.

DE LA GOURNERIE – Sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques (Compt. rend.) *Paris* 1866.

A. GERNERTH – Fünfstellige gemeine Logarithmen der Zahlen under Winkelfunctionen von 10 zu 10 Secunden, nebst den Proportionaltheilen ihrer Differenzen *(Logaritmi comuni, con cinque cifre decimali, dei numeri e delle funzioni angolari di* 10 *in* 10 *secondi, aggiuntevi le parti proporzionali delle loro differenze)* – *Wien* 1866.

W. J. MILLER – Mathematical Questions, with their solutions, from the *Educational Times*, with many papers und solutions not published in the *Educational Times*. Vol. IV. from july to december 1865 – *London* 1866.

D. TURAZZA – Relazione sul teorema di Sylvester (Atti Ist. Ven.) – *Venezia* 1866.

D. TURAZZA – Intorno agli assi principali ed agli assi permanenti in un sistema rigido qualunque (Mem. Inst. Ven.) – *Venezia* 1865.

P. L. SOULOT. – Méthode des plans cotés – *Paris* 1866.

M. POUDRA – Perspective-relief – Paris 1866.

R. BALTZER – Ableitung der Gauss'schen Formeln für die Flächenkrümmung (Berichte d. Sächs. Gesell.) – *Leipzig* 1866.

A FORTI – Teorica dell'attrazione delle sfere esposta con analisi elementare – *Pisa* 1866.

SALMON. – Analytische Geometriae der kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden; unter Mitwirkung des Verfassert deutsch beerbeitet von Dr. W. FIFDLER. Zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage. Erste Abtheilung: Bogen 1-18 – *Leipzig* 1866.

JACOBI – Vorlesungen ueber Dynamik, nebst fünf hinterlassenen abhandlungen, herausgegeben von A. Clebsch – *Berlin* 1866.

SULLE PROPRIETÀ

GEOMETRICHE E DINAMICHE

DE' CENTRI DI PERCOSSA

NE' MOTI DI ROTAZIONE

MEMORIA

DI D. CHELINI

DELLE SCUOLE PIE.

Quel profondo e sagacissimo geometra che fu il sig. L. Poinsot, nell' ultimo degli scritti co' quali ha tanto contribuito al perfezionamento della Meccanica, occupandosi di questioni sulla percussione scoprì un certo numero di nuove proprietà geometriche e dinamiche che si offrono a considerare in un corpo quando, per l'azione di un impulso ricevuto, il corpo debba concepire un moto di rotazione intorno ad una retta la cui direzione riesca o parallela ad uno degli assi principali del centro di gravità, ovvero contenuta in uno de' piani determinati da questi assi. Nella presente Memoria io mi propongo di mostrare che le dette proprietà sussistono non solamente ne' due casi contemplati dal sig. Poinsot, ma eziandio qualunque sia la direzione della retta intorno a cui debba avvenire la rotazione, purchè questa retta sia una di quelle (in numero infinito nello spazio) che si dicono *assi permanenti* del corpo. Rendendo più generale la teoria del sig. Poinsot, io spero di averla resa ad un tempo più semplice per l'unità de' principii, e per l' evidenza e connessione delle conseguenze; oltre a chè le stesse verità si presentano sotto un aspetto nuovo e più completo. Quanto alla sua importanza, ecco ciò che dice l' illustre Autore relativamente ai risultati a cui egli perviene: *Il nous semble que des vérités si claires et d'une expression si facile sont comme de nouveaux éléments qu'on ajoute à la science et qui ne peuvent manquer de la perfectioner. Car il faut convenir que l'esprit humain ne s'avance guére qu'à l'aide de ces idées plus simples, ou de ces instruments plus commodes qu'il imagine et qu'il manie, pour ainsi dire, avec plus de facilité* (Journal de Mathématiques, 2ᵉ serie, tome II, 1857).

Comincio dal richiamare e dallo stabilire alcune formole, in parte conosciute ed in parte nuove, che conducono nel modo più diretto alla teoria generale di cui si tratta.

Formole che, nel movimento di un corpo, rappresentano le forze equivalenti alle quantità di moto delle molecole del corpo.

1. È noto che il movimento di un corpo solido, per quanto si voglia suppor complicato, ove si consideri in un dato istante dt, si può sempre riguardare come composto di un *moto semplice di rotazione* che si effettua identicamente intorno a ciascuno de' suoi punti, e di un *moto semplice di traslazione* che diversifica da un punto all'altro (*) (*Mecc.* p. 266). Per *moto di traslazione di un corpo* si suole intendere (e qui s' intenderà sempre) *il moto del suo centro di gravità.*

Denotiamo per O il centro di gravità, origine di tre assi rettangoli Ox, Oy, Oz affatto arbitrarii; per μ la massa del corpo, e per

$$A=\int (y^2+z^2)\,d\mu\,, \qquad B=\int (z^2+x^2)\,d\mu\,, \qquad C=\int (x^2+y^2)\,d\mu,$$

$$A'=\int yz\,d\mu\,, \qquad B'=\int zx\,d\mu\,, \qquad C'=\int xy\,d\mu$$

le consuete notazioni relative ai momenti d'inerzia.

Sia lmn la *direzione* di una retta θ avente l'origine in O (per l, m, n s' intendano i coseni degli angoli che la retta θ fa cogli assi positivi Ox, Oy, Oz). Il momento d' inerzia S intorno a questa retta sarà (*Mecc.* p. 227)

$$S=Al^2+Bm^2+Cn^2-2\,(A'mn+B'nl+C'lm).$$

Poniamo ancora

$$L=Al-C'm-B'n\,,$$

$$M=Bm-A'n-C'l\,,$$

$$N=Cn-B'l-A'm,$$

e rappresentiamo per OG la retta G che, sugli assi Ox, Oy, Oz, ha per componenti L, M, N, cosicchè si abbia

$$G=ris.\,(L, M, N)\,, \qquad (ris. = \text{risultante})$$

---

(1) Per ciò che viene puramente affermato, cito coll' iniziale *Mecc.* i miei elementi di Meccanica razionale (Bologna, 1860) dove le dimostrazioni sono in gran parte nuove. A questi elementi va unito un *Appendice* sui principii fondamentali delle Matematiche.

Il momento S sarà pure rappresentato da

$$S = Ll + Mm + Nn = G \cos (G\theta).$$

Ciò posto, il movimento del corpo, considerato nell' istante *dt*, consista in un moto di traslazione del centro O di gravità che tenda a farsi colla velocità *v* rappresentata dalla linea O*v*, ed in un moto di rotazione che tenda a farsi colla velocità angolare θ rappresentata in grandezza ed in asse dalla retta Oθ avente la direzione *lmn*. Tutte le quantità di moto elementari, quali $\frac{dx}{dt}d\mu$, $\frac{dy}{dt}d\mu$, $\frac{dz}{dt}d\mu$, trasportate in O si comporranno *nella forza unica* μv che avrebbe il centro di gravità se la massa intera del corpo vi fosse concentrata, ed *in una coppia unica* rappresentata in grandezza e in asse dalla formola (*Mecc.* p. 227)

$$G.\theta = \textit{ris.}\ (L\theta, M\theta, N\theta) = \textit{ris.}\ (L, M, N)\ \theta.$$

Nell' ellissoide centrale (*cost.* = costante arbitraria)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\,(A'yz + B'zx + C'xy) = \text{cost}.$$

il piano della coppia risultante Gθ, rappresentato dall' equazione

$$Lx + My + Nz = 0\ ,$$

è *conjugato* alla direzione *lmn* dell' asse di rotazione Oθ (*Mecc.* p. 279), cioè divide per metà tutte le corde dell' ellissoide parallele a quest' asse.

Formole relative all' asse centrale delle rotazioni.

2. Sull' asse dell' angolo (θ, *v*) (*) si prenda il segmento

$$OD = \frac{v \text{ sen } (\theta v)}{\theta}\ ,$$

l' asse centrale delle rotazioni sarà la retta Dθ condotta dall' estremità di OD parallelamente all' asse di rotazione Oθ (**) (*Mecc.* p. 268). Segnata con D la retta OD

(*) Per *asse dell' angolo* (θ, *v*) s' intende una retta perpendicolare in O alle due Oθ, O*v*, e disposta rispetto all' angolo θO*v* a quel modo che O*x* è rispetto all' angolo *y*O*z*.

(**) Le rette parallele tra loro, ossia della stessa direzione, saranno indicate ciascuna da due lettere, la prima dinotante l' *origine*, e la seconda la *direzione*. Per es. le notazioni Oθ, Dθ, Gθ, Qθ rappresentano rette parallele di cui l' origine rispettiva è ne' punti O, D, G, Q.

*

avremo (M. *Appendice pag.* 25 e 35)

$$(D)\quad \begin{cases} \cos(xD) = [m\cos(zv) - n\cos(yv)] : \text{sen}\,(\theta v)\,, \\ \cos(yD) = [n\cos(xv) - l\cos(zv)] : \text{sen}\,(\theta v)\,, \\ \cos(zD) = [l\cos(yv) - m\cos(xv)] : \text{sen}\,(\theta v). \end{cases}$$

Moltiplicando rispettivamente per L, M, N queste equazioni e sommandole si ottiene

$$(D)_1\quad \begin{cases} G\cos(GD)\,\text{sen}\,(\theta v) = (Mn - Nm)\cos(xv) \\ \qquad\qquad + (Nl - Ln)\cos(yv) \\ \qquad\qquad + (Lm - Ml)\cos(zv). \end{cases}$$

L'asse centrale delle rotazioni è detto da Poinsot *asse spontaneo scorrente* perchè, nell'istante dt che si considera, il moto del corpo si riduce a girare intorno a questo asse ed a scorrere contemporaneamente lungo il medesimo, a quel modo che fa una vite intorno al suo asse. Notando per h il moto di traslazione lungo l'asse centrale, si avrà (M. p. 269).

$$h = v\cos(\theta v)\,,\quad D.\theta = v\,\text{sen}\,(\theta v)\,,\quad v^2 = h^2 + D^2\theta^2.$$

3. Quando il moto del corpo si riduce ad una pura rotazione intorno all' asse centrale, quest' asse ritiene il semplice nome di *asse spontaneo*. Affinchè ciò avvenga, è necessario e sufficiente che resti verificata la condizione $h = v\cos(\theta v) = 0$, e per conseguenza

$$l\cos(xv) + m\cos(yv) + n\cos(zv) = 0.$$

In generale: *il moto di un corpo è riducibile ad una semplice rotazione quando, preso un punto qualunque per centro di riduzione de' moti, l'asse della rotazione risultante riesce perpendicolare alla trajettoria di esso punto* (M. p. 269). In questo caso le forze che animano il corpo, riportate al centro di gravità sono

$$\mu v = \mu.OD.\theta\,,\qquad G\theta = ris.\,(L, M, N)\,\theta.$$

4. Finalmente quando il moto del corpo è tale che, oltre di ridursi ad una semplice rotazione, le quantità di moto elementari equivalgono ad una forza unica, l'asse centrale delle rotazioni prende il nome di *asse permanente*. Affinchè ciò abbia luogo, è necessario e sufficiente che la direzione Ov del moto di traslazione risulti perpendicolare ad un tempo e all' asse di rotazione $O\theta$ ed all' asse OG della

coppia risultante (M. p. 43); ond'è che dovranno verificarsi le due equazioni

$$l \cos(xv) + m \cos(yv) + n \cos(zv) = 0,$$

$$L \cos(xv) + M \cos(yv) + N \cos(zv) = 0.$$

Facendo variare il rapporto $\frac{v}{\theta} = \mathrm{OD}$, alle diverse variazioni corrisponderanno altrettanti assi permanenti, aventi tutti la medesima direzione lmn, e tutti contenuti in un medesimo piano (OG, $O\theta$), perpendicolare in O ad Ov, e per conseguenza rappresentato dall'equazione

$$(\mathrm{P}) \qquad (Mn - Nm)\, x + (Nl - Ln)\, y + (Lm - Ml)\, z = 0.$$

5. N. B. Gli assi rettangoli Ox, Oy, Oz essendo affatto arbitrarii, 1° se siano presi secondo le direzioni degli assi principali d'inerzia del centro O, l'equazione (P), a causa di $0 = A' = B' = C'$, diviene

$$(\mathrm{P})_1 \qquad (B - C)\frac{x}{l} + (C - A)\frac{y}{m} + (A - B)\frac{z}{n} = 0.$$

2° Se invece l'asse Ox sia preso secondo l'asse di rotazione $O\theta$, l'equazione (P), a causa di $l = 1$, $0 = m = n$, si muta nella

$$B'y - C'z = 0.$$

3° E questa, se l'asse arbitrario Oy si prenda nella direzione DO, dovendo ridursi a $z = 0$, darà

$$B' = \int zx d\mu = 0.$$

La relazione $B' = 0$, essendo simmetrica rispetto ad Ox e ad Oz, mostra che gli assi permanenti del piano yz sono paralleli ad Oz. Ne segue in generale che: *I piani degli assi permanenti sono a due a due così disposti che l'uno è perpendicolare agli assi permanenti dell'altro*, e che, *in ogni pajo di tali piani rettangolari, le direzioni degli assi permanenti*, quali Oz, Ox, *sono vincolate dall'equazione*

$$\int zx\, d\mu = 0.$$

L'equazione (P) o $(\mathrm{P})_1$ rende manifesto che, *data* la direzione lmn di una retta qualunque $O\theta$, rimane *determinato* il piano degli assi permanenti paralleli a questa retta; e che viceversa, *dato* un piano qualsivoglia che passi pel centro di gravità, $Px + Qy + Rz = 0$, rimane *determinata* la direzione lmn degli assi permanenti contenuti in questo piano.

Formole generali relative all' asse centrale delle forze, rappresentanti le quantità di moto elementari.

6. Ridotte nel punto O le quantità di moto delle molecole alla forza unica μv, ed alla coppia $G.\theta$, si prenda sull' asse dell' angolo (v, G) il segmento

$$OF = \frac{G\theta \operatorname{sen}(vG)}{\mu v};$$

l'asse centrale delle forze sarà la linea Fv condotta dalla estremità di OF parallelamente alla retta Ov che rappresenta la velocità del punto O, centro di gravità (M. p. 43). Denotiamo OF per f, e per $K.\theta$ il valor minimo che prende la coppia $G.\theta$ quando il centro di riduzione è preso sull' asse centrale Fv, di cui la più corta distanza dal centro di gravità è $OF = f$. Si avranno le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &K = G\cos(vG), \qquad \cot(vG) = \frac{\theta}{\mu v}\cdot\frac{K}{f}, \\ &\frac{\mu v}{\theta} f = G \operatorname{sen}(vG), \qquad G^2 = K^2 + \left(\frac{\mu v}{\theta} f\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Per la direzione di OF, asse dell' angolo (v, G), avremo

$$\cos(xf) = [N\cos(yv) - M\cos(zv)] : G \operatorname{sen}(vG),$$

$$\cos(yf) = [L\cos(zv) - N\cos(xv)] : G \operatorname{sen}(vG),$$

$$\cos(zf) = [M\cos(xv) - L\cos(yv)] : G \operatorname{sen}(vG).$$

Moltiplicando ciascuna di quest' equazioni per

$$f = \frac{\theta}{\mu v}\cdot G \operatorname{sen}(vG),$$

si avranno le coordinate a, b, c del punto F

$$(f) \qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{\theta}{\mu v}[N\cos(yv) - M\cos(zv)], \\ b &= \frac{\theta}{\mu v}[L\cos(zv) - N\cos(xv)], \\ c &= \frac{\theta}{\mu v}[M\cos(xv) - L\cos(yv)], \end{aligned}\right.$$

ed

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

7. Consideriamo ora l'angolo triedro determinato dalle tre rette $O\theta$, Ov, OG le quali, affine di regolare i segni (± 1), si riguarderanno per un momento come tre assi obliqui Ox, Oy, Oz, e denoteremo per Ox_1, Oy_1, Oz_1 gli assi degli angoli

$$(yz) = (v,G)\ , \qquad (zx) = (G,\theta)\ , \qquad (xy) = (\theta,v).$$

Ciò avvertito, immaginiamo una sfera col centro in O e di raggio $= 1$. Gli angoli solidi $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ segneranno sopra questa sfera due triangoli sferici xyz, $x_1y_1z_1$, *polari* l'uno dell'altro. In questi triangoli si ha primieramente

$$\text{sen}\,(yz)\cos(xx_1) = \text{sen}\,(xy)\cos(zz_1)\,,$$

perchè ciascuno de' due prodotti rappresenta il sestuplo del tetraedro determinato dal centro O e dai vertici del triangolo sferico xyz. In secondo luogo si ha

$$\cos(zx) = \cos(xy)\cos(yz) - \text{sen}\,(xy)\,\text{sen}\,(yz)\cos(z_1x_1)\,,$$

Se ad Ox, Oy, Oz torniamo a sostituire $O\theta$, Ov, OG, e ad Oz_1, Ox_1 [assi degli angoli $(x,y) = (\theta,v)$, $(y,z) = (vG)$] le rette OD, OF; le due formole precedenti diventano

$$\text{sen}\,(vG)\cos(\theta f) = \text{sen}\,(\theta v)\cos(GD)\,,$$

$$\cos(G\theta) = \cos(\theta v)\cos(vG) - \text{sen}\,(\theta v)\,\text{sen}\,(vG)\cos(Df).$$

Se la 1ª di quest' equazioni si moltiplica per $\frac{G}{\mu}\text{sen}\,(\theta v)$, e la 2ª per $\frac{G}{\mu}$ (ponendo

mente a $\qquad OD = \frac{v}{\theta}\text{sen}\,(\theta v)\,, \qquad OF = \frac{\theta}{\mu v}G\,\text{sen}\,(vG)\,,$

donde $\qquad OD.OF = \frac{G}{\mu}\,\text{sen}\,(vG)\,\text{sen}\,(\theta v)\,,$

ed a $\qquad G\cos(G\theta) = S\,, \qquad G\cos(vG) = K$)

si ottiene

$$(F)\quad \left\{ \begin{aligned} &OD.OF\cos(\theta f) = \frac{G}{\mu}\cos(DG)\,\text{sen}^2\,(\theta v)\,, \\ &OD.OF\cos(Df) = \frac{K\cos(\theta v) - S}{\mu}\,. \end{aligned} \right.$$

8. Supponiamo adesso che l'*asse centrale* Dθ *delle rotazioni* non sia *scorrente*, cioè supponiamo che nell'istante dt il moto si riduca ad una *semplice rotazione* intorno all'asse Dθ. In questa supposizione la linea Ov, per le cose dette, sarà perpendicolare alle tre Oθ, OD, OF, le quali saranno conseguentemente in un medesimo piano, e le prime due essendo rettangolari formeranno *angoli complementari* ad un retto colla terza OF. Laonde si avrà sen $(\theta v) = 1$, cos $(\theta v) = 0$, e

$$\mathrm{OD} = \frac{v}{\theta}, \qquad \mathrm{OF} = \frac{\mathrm{G}\ \mathrm{sen}\,(v\mathrm{G})}{\mu.\mathrm{OD}},$$

e le (F) diventano

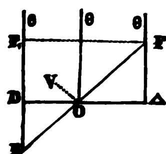
$$(\mathrm{F})_1 \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{OD.OF}\cos(\theta f) = \frac{\mathrm{G}}{\mu}\cos(\mathrm{DG}), \\ &\mathrm{OD.OF}\cos(\mathrm{D}f) = -\frac{\mathrm{S}}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Quest'ultima formola rende manifesto che l'angolo (Df), = ang. (DOF), è ottuso, e che perciò il prodotto OF cos (Df) rappresenta la projezione di OF sul prolungamento di DO al di là del centro O. Inoltre essendo

$$ang.\theta f + ang.f\mathrm{D} = ang.\theta\mathrm{D} = 90°,$$

e quindi cos $(f\mathrm{D})$ = sen (θf), la divisione delle $(\mathrm{F})_1$ fornisce

$$\mathrm{tang}.(\theta f) = \frac{-\mathrm{S}}{\mathrm{G}\cos(\mathrm{DG})}, \qquad \mathrm{sen}^2(\theta f) = \frac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{S}^2 + \mathrm{G}^2\cos^2(\mathrm{DG})}.$$



(fig. 1.)

A fine di dar rilievo colla figura al significato geometrico delle $(\mathrm{F})_1$, conduciamo per i punti D, F i due assi indefiniti Dθ, Fθ parallelamente ad Oθ, poi le perpendicolari DΔ, FF$_1$ a questi assi, e in ultimo prolunghiamo FO sino ad incontrare in E l'asse Dθ. Si ha dalla figura

$$\mathrm{O}\Delta = \mathrm{OF}\cos(\mathrm{D}f), \qquad \mathrm{OF}\cos(\theta f) = \mathrm{DF}_1;$$

e le $(\mathrm{F})_1$ si mutano nelle

$$\mathrm{OD.DF}_1 = \frac{\mathrm{G}}{\mu}\cos(\mathrm{DG}), \qquad \mathrm{OD.O}\Delta = -\frac{\mathrm{S}}{\mu}.$$

Riguardando come positive le direzioni di OΔ e di OF, e però come negative le opposte di OD, OE, l'ultima equazione dà

$$\mathrm{DO.O\Delta} = \frac{\mathrm{S}}{\mu}, \qquad \mathrm{D\Delta} = \mathrm{DO} + \frac{\mathrm{S}}{\mu\mathrm{DO}} = \mathrm{O\Delta} + \frac{\mathrm{S}}{\mu\mathrm{O\Delta}}$$

E siccome $\mathrm{DO} = \mathrm{EO}$ sen (θf), $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{OF}$ sen (θf), così alle $(\mathrm{F})_1$ si può dare anche la forma

$$(\mathrm{F})_2 \quad \begin{cases} \mu.\mathrm{EO.OF} = \dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{sen}^2(\theta f)} = \mathrm{S} + \dfrac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{S}}\cos^2(\mathrm{DG}), \\ \mu.\mathrm{OD.DF}_1 = \mathrm{G}\cos(\mathrm{DG}). \end{cases}$$

A queste, nelle applicazioni ai casi particolari, conviene aggiungere (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{G}\cos(\mathrm{DG})\,\mathrm{sen}\,(\theta v) = {} & (\mathrm{M}n - \mathrm{N}m)\cos(xv) \\ & + (\mathrm{N}l - \mathrm{L}n)\cos(yv) \\ & + (\mathrm{L}m - \mathrm{M}l)\cos(zv). \end{aligned}$$

9. Quando l'asse della rotazione spontanea è un *asse permanente,* la direzione $\mathrm{O}v$ del moto di traslazione, oltre di essere perpendicolare ad $\mathrm{O}\theta$, deve di più riuscire perpendicolare ad OG, non che (per costruzione) ad OD e ad OF. Ed essendo retti gli angoli $(\theta\mathrm{D})$, $(\mathrm{G}f)$, ed avendosi

$$ang.(\theta\mathrm{D}) = ang.(\theta\mathrm{G}) + ang.(\mathrm{GD}),$$
$$ang.(\mathrm{G}f) = ang.(\mathrm{G}\theta) + ang.(\theta f),$$

sarà

$$\mathrm{sen}\,(\theta f) = \cos(\mathrm{G}\theta) = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{G}}, \qquad \cos(\mathrm{GD}) = \mathrm{sen}\,(\theta\mathrm{G});$$

e per conseguenza

$$(\mathrm{F})_3 \quad \begin{cases} \mu.\mathrm{EO.OF} = \dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{sen}^2(\theta f)} = \dfrac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{S}}, \\ \mu.\mathrm{OD.DF}_1 = \mathrm{G}\cos(\mathrm{GD}) = \mathrm{G}\,\mathrm{sen}\,(\theta\mathrm{G}). \end{cases}$$

10. Ove occorra di prender gli assi $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ nella direzione delle tre linee $\mathrm{O}\theta$, $\mathrm{O\Delta}$, $\mathrm{O}v$, che nel caso di una semplice rotazione riescono sempre rettangolari, basta porre sen (θv) = sen $(xz) = -1$, ed

$$l = 1, \quad 0 = m = n; \quad \cos(zv) = 1, \quad \cos(xv) = \cos(yv) = 0.$$

In questa supposizione avremo

$$S = A = \int (y^2 + z^2)\, d\mu\,, \quad -G\cos(DG) = C' = \int xy\, d\mu\,,$$

$$\text{sen}\,(\theta f) = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + C'^2)}}$$

e le $(F)_2$ diventano

$$\mu.EO.OF = A + \frac{C'^2}{A}\,, \qquad \mu.OD.DF_1 = -C'.$$

11. Quando l'asse istantaneo è di più *asse permanente*, si dovrà aggiungere la condizione

$$B' = \int zx\, d\mu = 0.$$

E se l'asse di rotazione sia parallelo ad uno degli assi permanenti del centro di gravità, nel qual caso si ha pure

$$C' = \int xy\, d\mu = 0\,,$$

risulterà $\quad \text{sen}\,(\theta f) = \cos(G\theta) = 1\,, \quad EO.OF = \dfrac{A}{\mu}\,,$

e la linea EF sarà perpendicolare ad $O\theta$ e si confonderà con $D\Delta$.

Proprietà geometriche de' centri di oscillazione e de' centri di percossa.

12. L'asse di sospensione di un pendolo composto sia una retta qualunque $D\theta$, avente la direzione *lmn*, e situata alla distanza DO (fig. I.) dal centro O di gravità del pendolo. La velocità angolare di rotazione, nell'istante dt, sia θ. In questo istante *l'asse di sospensione* si potrà riguardare come *un asse spontaneo di rotazione rispetto alle quantità di moto delle molecole del pendolo,* quantità che, riportate al centro di gravità, sono equivalenti alla forza μv ed alla coppia $G\theta$. La forza $\mu v = \mu DO.\theta$, essendo quella onde sarebbe animato il centro di gravità se tutta la massa μ vi fosse concentrata, ha una direzione perpendicolare al *piano di oscillazione,* cioè al *piano determinato dall' asse di sospensione e dal centro di gravità.*

Sarà chiamato *centro di oscillazione* il punto *abc* (6) dove l'asse centrale delle forze, Fv, che è perpendicolare al piano di oscillazione, incontra in F il detto piano. Se in questo piano immaginiamo infinite linee, tutte parallele all'asse di sospensione, come destinate ciascuna ad esser presa alla sua volta per asse di sospensione, pos-

siamo stabilire che: *Gli assi di sospensione aventi la stessa direzione* (lmn) *e contenuti in un piano condotto pel centro di gravità, tengono i loro centri di oscillazione* (abc) *sopra una retta che passa pel centro di gravità, ed in particolare sulla linea* EF, *asse dell' angolo* (v, G), intersezione de due piani

$$Lx + My + Nz = 0\,,$$

$$x\cos(xv) + y\cos(yv) + z\cos(zv) = 0.$$

13. Il centro di oscillazione diviene *centro di percossa* quando l'asse di sospensione è un *asse permanente di rotazione,* e sopra quest' asse il *centro di permanenza* coincide colla projezione F_1 del centro di percossa (M. p. 205 e 210).

N. B. Nel moto rotatorio intorno ad un asse permanente, siccome le quantità di moto delle molecole equivalgono ad una forza unica concentrata nel centro di percossa, così potremo dire che *la forza del centro di percossa,* in un dato istante, *equivale al moto rotatorio che si effettua in tale istante intorno all' asse permanente.* Per *moto rotatorio* si deve intendere il complesso delle quantità di moto onde, nella rotazione, sono animate contemporaneamente tutte le molecole del corpo.

Riteniamo, al presente, che le direzioni degli assi Ox, Oy, Oz siano quelle delle rette $O\theta$, $O\Delta$, Ov. Le formole trovate

$$\mathrm{EO.OF} = \frac{1}{\mu}\left(A + \frac{C'^2}{A}\right), \qquad \mathrm{OD.DF_1} = -\frac{C'}{\mu}\,,$$

fanno palese: 1° Che i due assi $E\theta$, $F\theta'$, riguardati come assi di sospensione, sono tali che l' uno contiene il centro di oscillazione dell' altro (per es. come F è il centro di oscillazione rispetto all' asse $E\theta$, così il punto E è il centro di oscillazione rispetto all' asse $F\theta$); 2° Che se l' asse di sospensione $E\theta$ si muove parallelamente a se stesso nel piano xy, il punto F_1 (projezione del centro di oscillazione F sul detto asse) descriverà un' iperbole equilatera, avente per asintoti le due rette $O\theta$, $O\Delta$, e per equaz. $\mu \mathrm{OD.DF_1} = -C'$; 3° Che quando l' asse di sospensione è parallelo ad uno degli assi permanenti relativi al centro di gravità, come avviene ne' pendoli che servono alla misura del tempo, la retta EF si confonde colla retta $D\Delta$ (11.), ed il centro di oscillazione è precisamente quale suol definirsi in questi pendoli. Così la definizione data del centro di oscillazione contiene come caso particolare la definizione in uso.

14. Restano intanto poste in aperto e dimostrate le seguenti proprietà geometriche de' centri di oscillazione e di percossa.

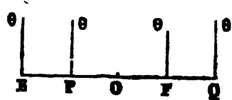
In un pendolo comunque composto: 1° *Gli assi di sospensione paralleli tra loro ed esistenti in un medesimo piano di oscillazione, tengono i loro centri di oscilla-*

zione sopra una retta che passa pel centro di gravità; 2° Sono conjugati a due a due per modo che l' uno ha sopra di sè il centro di oscillazione dell' altro; 3° Il prodotto delle distanze che da due centri conjugati corrono al centro di gravità (posto sempre frammezzo ad essi) *è costante; 4° Se i centri di oscillazione si projettano sopra i loro assi di sospensione, il luogo delle projezioni sarà un' iperbole equilatera, simmetrica intorno al centro di gravità, corrente in mezzo a due asintoti l' uno parallelo e l' altro perpendicolare ai detti assi.*

Queste proprietà trovate dal sig. Poinsot nel caso speciale che gli assi di rotazione siano o paralleli ad uno degli assi permanenti del centro di gravità, ovvero contenuti in uno de' piani determinato dagli stessi assi, io le estesi ne' miei elementi di Meccanica a tutti gli assi permanenti paralleli, qualunque sia la loro direzione comune (M. p. 208 e 295). In appresso il chiarissimo prof. sig. Domenico Turazza trovò che le stesse proprietà convenivano a tutti gli assi spontanei di rotazione. La teoria che ho esposta ha il vantaggio di farle discendere spontaneamente dai loro principii più generali.

Proprietà dinamiche de' centri di percossa.

15. Le proprietà *dinamiche* si distinguono dalle geometriche in quanto che suppongono in atto la rotazione del corpo, e non appartengono che ai soli centri di percossa, mentre le geometriche si estendono anche ai centri di oscillazione.



(fig. 2.)

Sulla linea de' centri di percossa, oltre i due punti conjugati *fissi* E, F, notiamone ad arbitrio due altri *mobili* P, Q. Fatto per abbreviare

$$\lambda = \text{sen}\,(\theta f) = \cos\,(G\theta) = \frac{S}{G},$$

avremo $S = \lambda G$, ed

$$EO.OF = PO.OQ = \frac{S}{\mu\lambda^2} = \frac{G}{\lambda\mu} = \frac{G^2}{\mu S}.$$

Il prodotto PO.OQ dovendo mantenersi costante al variare de' suoi fattori, è manifesto che quando l' uno de' due punti mobili P, Q si avvicina al centro O, l' altro dee allontanarsene nella stessa proporzione, per modo che la loro distanza, espressa da

$$PQ = PO + OQ = PO + \frac{S}{\mu\lambda^2 GO} = OQ + \frac{S}{\mu\lambda^2 OQ},$$

può divenir grande quanto si vuole. Ne segue che quando l' uno de' punti fissi E, F è dentro l' intervallo PQ, l' altro ne sarà fuori.

Supponiamo che il corpo nell' istante dt eseguisca la rotazione θdt intorno all'asse permanente $E\theta$. Le quantità di moto delle molecole del corpo equivarranno ad una forza unica μv che si potrà immaginare tutta raccolta nel centro F di percossa, secondo una direzione perpendicolare al piano θEF. Chiamo F questa forza μv concentrata nel punto F, che *rappresenta il moto di rotazione del corpo intorno ad* $E\theta$. Poichè, nell' attuarsi della rotazione, ogni punto del corpo è animato da una velocità che ha per misura il prodotto della velocità angolare θ per la distanza del punto all' asse di rotazione $E\theta$, le velocità de' punti F, P, Q, O saranno

$$\theta.\lambda EF\,,\quad \theta.\lambda EP\,,\quad \theta.\lambda EQ\,,\quad \theta.\lambda EO = v.$$

16. Il moto rotatorio che intorno all' asse permanente $E\theta$ si effettua colla velocità angolare θ, si concepisca decomposto in due moti rotatorii intorno agli assi paralleli $P\theta$, $Q\theta$. Questi moti componenti si effettueranno rispettivamente colle velocità angolari (M. p. 266)

$$\theta\frac{EQ}{PQ}\,,\qquad \theta\frac{PE}{PQ}\,,$$

per le quali, considerate a parte, il centro di gravità O sarebbe animato dalle velocità

$$\theta\frac{EQ}{PQ}.\lambda PO\,,\qquad \theta\frac{PE}{PQ}.\lambda QO.$$

Questi moti rotatorii parziali equivarranno ciascuno ad una forza unica raccolta nel rispettivo centro di percossa Q, P. Se denotiamo queste forze colle stesse lettere de' punti in cui si suppongono concentrate, avremo

$$P = \mu.\theta\frac{PE}{PQ}.\lambda QO\,,\qquad Q = \mu.\theta\frac{EQ}{PQ}.\lambda PO.$$

Ora, siccome il moto rotatorio intorno ad $E\theta$ equivale ai due moti rotatorii intorno a $P\theta$, $Q\theta$, così la forza unica F che rappresenta il primo moto, dovrà essere equivalente alle forze parallele P, Q che rappresentano i secondi moti. Ma queste forze P, Q, considerate come componenti di F, sono espresse dalle note formole

$$P = F\frac{FQ}{PQ} = \mu.\theta\ \lambda EO\ \frac{FQ}{PQ},$$

$$Q = F\frac{PF}{PQ} = \mu.\theta\ \lambda EO.\frac{PF}{PQ}.$$

Queste nuove espressioni dovranno dunque riuscire identiche alle precedenti. Tale identità si rende manifesta nel modo che segue. Se all' uno e all' altro membro di ciascuna dell' eguaglianze (*)

$$EO.OF = PO.OQ\,, \qquad EO.FO = OQ.OP\,,$$

si aggiungano rispettivamente i prodotti EO.PO, EO.OQ, si ottiene subito

$$EO.PF = PO.EQ\,, \qquad EO.FQ = OQ.EP = QO.PE\,;$$

e con ciò è resa evidente l'accennata identità.

Abbiamo adunque in generale:

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} P &= F\frac{FQ}{PQ} = \mu\theta\frac{PE}{PQ}\lambda QO = \mu\frac{OQ}{PQ}.\theta\lambda EP\,, \\ Q &= F\frac{PF}{PQ} = \mu\theta\frac{EQ}{PQ}\lambda PO = \mu\frac{PO}{PQ}.\theta\lambda EQ\,, \end{aligned} \right.$$

dove è da notare che le ultime espressioni delle forze, cioè

$$P = \mu\frac{OQ}{PQ}.\theta\lambda EP\,, \qquad Q = \mu\frac{PO}{PQ}.\theta\lambda EQ\,,$$

hanno un significato dinamico notabilissimo. Esse mostrano che, per avere la misura delle forze de' punti P, Q, conviene spartire la massa del corpo tra questi punti in ragione inversa della loro distanza al centro di gravità O, e poi dare a ciascuna delle masse parziali $\left(\mu\frac{OQ}{PQ}, \mu\frac{PO}{PQ}\right)$ la velocità del punto corrispondente ($\theta\lambda EP, \theta\lambda EQ$). Ciò posto, le formole (c) si possono tradurre nella seguente proposizione, principio fondamentale di tutte le proprietà dinamiche de' centri di percossa.

(*) Nell' indicare più punti in linea retta, per es. A, B, C, D, fo uso del principio

$$AB = -BA\,,$$

il quale significa che se la linea AB si riguarda come *positiva*, la BA si dee riguardare come *negativa*. Da questo principio si deduce quest' altro:

$$AB + BC + CD = AD,$$

qualunque sia l'ordine di successione de' punti A, B, C, D (M. *App.* pag. 4). Così

$$EO + OP + PQ + QF = EF\,;$$

vale a dire: *Quando le parti di una linea sono così disposte che ciascuna cominci dove termina quella che precede, la loro somma è uguale alla linea che unisce l'* origine *della prima parte col* termine *dell' ultima.*

17. Teorema. *Quando un corpo gira intorno ad un asse permanente, il moto rotatorio, considerato in un dato istante dt, equivale in tale istante alle forze che avrebbero due centri conjugati di percossa ove si supponesse che questi punti si fossero spartita la massa intera del corpo in ragion inversa delle loro distanze al centro di gravità; e le dette due forze sono tali che rappresentano*, dal loro canto, *due moti rotatorii paralleli, equivalenti al moto unico che si considera.*

Se la velocità di uno de' punti conjugati è nulla, il che avviene quando il punto è sull' asse medesimo di rotazione, com' è il punto E, il moto rotatorio sarà equivalente alla forza dell' altro punto F, centro di percossa dell' asse di rotazione, e questa forza è

$$\mu\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{EF}}.\theta\,\lambda\mathrm{EF}=\mu.\theta\,\lambda\mathrm{EO}=\mu v.$$

Benchè le quantità di moto del centro di gravità O e del centro di percossa F abbiano la stessa grandezza, tuttavia differiscono in ciò che quella del secondo punto è *quantità di moto di una massa più piccola animata da una velocità più grande*, differenza che le rende capaci di effetti diversi. Così se il corpo urta contro un punto fisso col centro di percossa, perde ogni moto; ma se vi urta col centro di gravità, perde il solo moto di traslazione, e conserva inalterato quello di rotazione.

COROLLARII

1° Le masse parziali $\mu\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}}$, $\mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}}$ che si concepiscono concentrate ne' punti conjugati P, Q, costituiscono un sistema il cui momento d' inerzia relativo all' asse $\mathrm{O}\theta$ è uguale a quello del corpo. Infatti i momenti parziali di P e di Q sono

$$\mu\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}}.\lambda^2\overline{\mathrm{PO}}^2=\mathrm{S}\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}},\qquad \mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}}.\lambda^2\overline{\mathrm{OQ}}^2=\mathrm{S}\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}},$$

la cui somma è $=$ S.

2° Quando i due punti conjugati P, Q, supposti in moto, si trovano dalla stessa parte dell' asse di rotazione $\mathrm{E}\theta$, le loro forze che, come componenti della forza F sono del medesimo segno, rappresentano moti rotatorii di senso contrario, *negativo* intorno a $\mathrm{Q}\theta$ e *positivo* intorno a $\mathrm{P}\theta$. Ed avendosi $\mathrm{P}+\mathrm{Q}=\mathrm{F}$, se l' una delle forze P, Q diminuisce, l' altra crescerà; e se l' una diviene minima ed $=0$, l' altra diverrà massima ed $=\mathrm{F}$.

3° Quando i punti P, Q si trovano disposti l' uno a destra e l' altro a sinistra di $\mathrm{E}\theta$, le loro forze che, come componenti della forza F sono di segno contrario, rappresentano moti rotatorii dello stesso senso. Ed avendosi $\mathrm{Q}-\mathrm{P}=\mathrm{F}$, le due

forze P, Q debbono nel loro variare diminuire insieme e crescere insieme; e se l'una P si avvicina al suo *limite minimo*, $= 0$, l' altra Q si dee pure avvicinare al suo *limite minimo*, $=$ F. In questo caso le due forze P, Q hanno pure ciascuna un *limite massimo* che sarà determinato in appresso.

4° Quando il moto del corpo consiste in una semplice rotazione θdt intorno alla retta $O\theta$ condotta pel centro di gravità, le quantità di moto delle molecole equivarranno ad una semplice coppia $G\theta = \frac{S.\theta}{\lambda}$, e le (c) si muteranno nelle seguenti

$$(R) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \mu \frac{OQ}{PQ} . \theta \lambda OP = - \frac{G.\theta}{PQ}, \\ Q &= \mu \frac{PO}{PQ} . \theta \lambda OQ = \frac{G.\theta}{PQ} = - P, \end{aligned} \right.$$

risultato che d'altra parte è per sè evidente; perchè la coppia $G.\theta$, il cui piano è conjugato all' asse di rotazione $O\theta$ (1), può certamente riguardarsi come proveniente da due forze situate in questo piano, parallele, uguali e di senso contrario.

5° Quando il corpo non ha che un puro moto di traslazione, $= \mu v$, la velocità v del centro di gravità si potrà riguardare come rappresentante una coppia di rotazioni $(\theta, -\theta)$ intorno agli assi paralleli $P\theta$, $Q\theta$. La velocità angolare θ sarà determinata dall' equazione (M. p. 266)

$$v = \theta . \lambda PQ.$$

Le componenti P, Q della forza μv saranno date dalle formole

$$(T) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \mu v \frac{OQ}{PQ} = \mu . \theta \lambda OQ, \\ Q &= \mu v \frac{PO}{PQ} = \mu . \theta \lambda PO, \end{aligned} \right.$$

entrambe dirette nel senso medesimo del moto di traslazione.

Limite minimo di PQ. *Limite massimo delle forze de' punti conjugati* P, Q, *e delle rotazioni parziali intorno agli assi conjugati* $P\theta$, $Q\theta$.

18. Supponendo note le distanze tra il centro di gravità O e i due punti conjugati fissi E, F, adottiamo per abbreviare le notazioni

$$EO = e, \qquad OF = f,$$

donde $$EF = e + f, \qquad PO.OQ = ef = \frac{S}{\mu.\lambda^2}.$$

Limite minimo di PQ. Supponendo mobili i punti conjugati P, Q, prendiamo per variabile indipendente

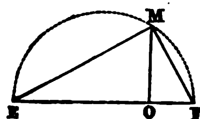
$$OQ = \omega;$$

sarà $$PO = \frac{ef}{\omega}, \qquad PQ = \omega + \frac{ef}{\omega}.$$

Eguagliando a zero la derivata di PQ, presa rispetto ad ω, si trova che il valore di ω corrispondente al suddetto limite è $= \sqrt{ef}$, e che per conseguenza i corrispondenti valori di OQ, PO, PQ, sono

$$OQ = \sqrt{ef} = PO, \qquad PQ = 2\sqrt{ef} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{S}{\mu}};$$

vale a dire: *I punti conjugati* P, Q *allorchè si sono avvicinati tra loro il più possibile, si trovano disposti ad egual distanza dal centro di gravità, e questa distanza è* $= \sqrt{ef}$.



(fig. 3.)

Per determinarli geometricamente, sopra la linea EF presa per diametro si costruisca un semicircolo, e pel punto O gli si conduca perpendicolarmente al diametro la semicorda $OM = \sqrt{ef}$. Fatto centro in O, con questa semicorda OM presa per raggio, si segneranno sulla linea EF le posizioni dei punti P, Q più vicine tra loro.

Si noti che nel triangolo EMF i valori de' due cateti sono

$$EM = \sqrt{e(e+f)} = e\sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)},$$

$$FM = \sqrt{f(e+f)} = f\sqrt{\left(1 + \frac{e}{f}\right)}.$$

19. *Limite massimo delle forze de' punti conjugati* P, Q. Avvi luogo a cercar questo limite, come si è notato superiormente, quando i punti P, Q si trovano dalla stessa parte del punto F, e però quando si ha $F = Q - P$. In questo caso, il limite massimo di una qualunque delle due forze componenti facendo conoscere quello dell' altra, basta che cerchiamo quello di una di esse, per es. di

$$Q = F\frac{PF}{PQ} = F\frac{(PO + OF)\,OQ}{(PO + OQ)\,OQ} = F.f\frac{\omega + e}{\omega^2 + ef}.$$

Prendendo la derivata di Q rispetto alla variabile ω, ed eguagliandola a zero, si trova l'equazione

$$\omega^2 + 2e\omega - ef = 0,$$

la quale, avendo l'ultimo termine $= -ef$, mostra che le sue radici rappresentano le distanze OQ, OP tra il centro di gravità O ed i punti conjugati ove le forze P, Q hanno la massima grandezza. Tali distanze, radici di cotesta equazione, sono

$$OQ = e\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right],$$

$$OP = -e\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right],$$

onde, essendo $PQ = PO + OQ = 2e\sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}$, ed

$$\left\{\begin{aligned} EQ &= EO + OQ = e\sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)} = EM, \\ EP &= EO + OP = -e\sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)} = -EM, \end{aligned}\right.$$

si conchiude che *i due punti cercati* P, Q *si trovano situati ad egual distanza dal punto* E, *e che questa distanza è* EM (fig. 3). E poichè in questi punti risulta

$$\theta\frac{EQ}{PQ} = \frac{\theta}{2}, \qquad \theta\frac{PE}{PQ} = \frac{\theta}{2},$$

possiamo stabilire che:

In que' punti conjugati P, Q *dove il moto rotatorio si risolve in due moti rotatorii eguali tra loro e dello stesso senso, ivi le forze che rappresentano questi moti rotatorii parziali, sono le più grandi possibili e di senso contrario.*

Abbiamo inoltre

$$\left\{\begin{aligned} PF &= PO + OF = e\left[1 + \frac{f}{e} + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right], \\ FQ &= FO + OQ = -e\left[1 + \frac{f}{e} - \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right], \end{aligned}\right.$$

e per conseguenza

$$PF = \frac{PQ.PO}{2e}, \qquad FQ = -\frac{PQ.OQ}{2e}.$$

Ciò posto, le formole $Q = F.\frac{PF}{PQ}$, $-P = F.\frac{FQ}{PQ}$, offrono i seguenti più grandi valori assoluti di Q e di P:

$$\left\{\begin{array}{l} Q = \frac{F}{2}\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right], \\ P = \frac{F}{2}\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right], \quad Q - P = F. \end{array}\right.$$

Quando il moto del corpo si riduce ad un puro moto di rotazione intorno al centro di gravità O, le forze P, Q essendo eguali e di senso contrario, ed espresse da

$$Q = -P = \frac{G.\theta}{PQ} = \frac{S.\theta}{\lambda PQ},$$

avranno il più gran valore possibile quando la distanza PQ è minima, ossia $= \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{S}{\mu}}$. Il loro valore massimo sarà dunque

$$Q = -P = \frac{\theta}{2}\sqrt{\mu S}, \quad \text{ed anche qui} \quad \theta\frac{OQ}{PQ} = \frac{\theta}{2}, \quad \theta\frac{PO}{PQ} = \frac{\theta}{2}.$$

20. *Limite massimo delle rotazioni* $\theta\frac{EQ}{PQ}$, $\theta\frac{PE}{PQ}$ *intorno agli assi conjugati* $P\theta$, $Q\theta$. Avvi luogo di cercare questo limite quando gli assi $P\theta$, $Q\theta$ si trovano dalla stessa parte di $E\theta$, ossia quando le due rotazioni componenti hanno segno contrario. E poichè in questo caso il limite massimo dell'una fa conoscere quello dell'altra, basta cercare il limite massimo di $\theta\frac{PE}{PQ}$, o (ciò che torna lo stesso) del rapporto

$$\frac{PE}{PQ} = \frac{(PO + OE)\,OQ}{(PO + OQ)\,OQ} = e\,\frac{f - \omega}{ef + \omega^2}.$$

Se di questo rapporto si prende la derivata rispetto ad ω, e si fa $= 0$, si ottiene

$$\omega^2 - 2f\omega - ef = 0.$$

Le radici OQ, OP di quest'equazione, il cui prodotto dee essere uguale all'ultimo termine $-ef$, sono

$$\left\{\begin{array}{l} OP = f\left[1 - \sqrt{\left(1 + \frac{e}{f}\right)}\right], \\ OQ = f\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{e}{f}\right)}\right]; \end{array}\right.$$

onde, essendo $$PQ = PO + OQ = 2f\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)},$$ ed

$$\begin{cases} FP = FO + OP = -f\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}, \\ FQ = FO + OQ = f\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)} = -FP, \end{cases}$$

si conchiude che i due punti cercati P, Q si trovano situati ad egual distanza dal punto F, e che questa distanza è = FM (fig. 3). E poichè in questi punti risulta

$$F\frac{FQ}{PQ} = \frac{F}{2}, \qquad F\frac{PF}{PQ} = \frac{F}{2},$$

possiamo stabilire che:

In quei punti conjugati P, Q *dove il moto rotatorio si risolve in due moti rotatorii di senso contrario e del massimo valore, ivi le forze che rappresentano questi moti parziali sono eguali tra loro e dello stesso senso.*

Abbiamo inoltre

$$EP = EO + OP = f\left[1+\frac{e}{f}-\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}\right],$$

$$EQ = EO + OQ = f\left[1+\frac{e}{f}+\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}\right],$$

e per conseguenza

$$EP = \frac{PQ.PO}{2f}, \qquad EQ = \frac{PQ.OQ}{2f}.$$

Ciò posto, le più grandi rotazioni parziali nelle quali si possa risolvere la data rotazione θ rispetto ai punti conjugati P, Q, sono offerte dalle formole

$$\begin{cases} \theta\frac{EQ}{PQ} = \frac{\theta}{2}\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}\right], \\ \theta\frac{PE}{PQ} = -\frac{\theta}{2}\left[-1+\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}\right]. \end{cases}$$

Quando il corpo non ha che un puro moto di traslazione, $= \mu v$, la coppia delle rotazioni $(\theta, -\theta)$ intorno agli assi $P\theta$, $Q\theta$ dovendo essere equivalente alla velocità v del centro di gravità, e perciò dovendosi avere

$$v = \theta.\lambda PQ,$$

è palese che la velocità angolare θ sarà massima quando la distanza PQ sarà minima, ossia $=\frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{S}{\mu}}$. Il valor massimo di θ sarà dunque

$$\theta=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\mu}{S}},$$

e ne' punti P, Q, le forze saranno $P=Q=\mu v\frac{OQ}{PQ}=\frac{\mu v}{2}$.

Dell' urto di uno de' centri di percossa P, Q, *contro un ostacolo o punto fisso, e suoi effetti.*

21. Supponiamo adesso che il corpo, nell'atto che effettua in un dato istante la rotazione θdt intorno all' asse permanente Eθ, urti contro un punto fisso con uno de' due punti conjugati P, Q, e cerchiamo qual sarà il moto che il corpo tenderà a prendere immediatamente dopo l' urto.

Estinguendosi nell' istante *dt* contro il punto fisso l' una delle due forze conjugate P, Q, l' altra forza equivarrà ad un moto rotatorio che tenderà ad effettuarsi intorno all' asse permanente che passa pel punto fisso. Il moto rotatorio dopo l'urto sarà quindi rappresentato dall' una o dall' altra delle forze (16)

$$P=\mu\theta\frac{PE}{PQ}.\lambda QO,\qquad Q=\mu\theta\frac{EQ}{PQ}.\lambda PO,$$

secondochè l' urto contro il punto fisso si faccia col punto Q ovvero col punto P; ed in corrispondenza la velocità del centro di gravità O, ossia del *moto di traslazione*, diverrà $=\frac{P}{\mu}$, ovvero $=\frac{Q}{\mu}$. Ciò posto:

1° Quando le forze P, Q sono di *senso contrario*, cioè P *negativa*, Q *positiva* e maggiore della forza F, i moti rotatorii che queste forze rappresentano saranno dello stesso senso, e ciascuno più piccolo del dato intorno ad Eθ. I punti P, movendosi in *senso contrario* del moto di traslazione, si chiameranno *punti posteriori del corpo*, e punti *anteriori* i punti conjugati Q che si muovono nel *senso diretto*. Se il corpo, nel suo rivolgimento, percuote il punto fisso con uno de' suoi punti *posteriori* P, il suo moto *progressivo* in avanti *si farà più celere;* e cangerà invece di senso e *diverrà retrogrado* se il corpo percuota con uno de' suoi punti *anteriori* Q: in ambedue i casi il *moto rotatorio* si rallenta, e siffattamente che quando il *moto di progressione* o di *riflessione* riceve la più gran celerità che possa avere, la velocità del *moto di rotazione* si riduce alla metà.

Nella ipotesi adunque che le forze P e Q siano di senso contrario, i punti P, centri di percossa posteriore, sono anche *centri di progressione;* i punti Q, centri di percossa anteriore, sono anche *centri di riflessione.*

2° Quando le forze P, Q sono *dello stesso senso,* e perciò ciascuna minore della forza F, i moti rotatorii che queste forze rappresentano intorno agli assi $Q\theta$, $P\theta$, saranno di senso contrario, *negativo* o di *conversione* intorno a $Q\theta$, *positivo* intorno a $P\theta$ e maggiore del moto impresso intorno ad $E\theta$. Laonde il *moto rotatorio* del corpo, se l' urto si fa col punto P, diverrà più celere, e se l' urto si fa col punto Q, cangerà di senso: in ambedue i casi il *moto di traslazione* si rallenta, e siffattamente che quando il moto di rotazione o di conversione riceve la più gran celerità che possa avere, la velocità del *moto di traslazione* si riduce alla metà.

Nella supposizione adunque che le forze P e Q siano dello *stesso senso,* i punti P saranno *centri di accelerata rotazione,* ed i punti Q, *centri di conversione.*

Possiamo intanto ritenere in generale che *l' urto di un corpo contro un ostacolo fisso non può render più rapido l' uno de' due moti di traslazione e di rotazione che a spese dell' altro.* E lo stesso dicasi del cangiamento di senso di ciascuno di questi due moti. « Nondimeno è assai notabile, osserva il sig. Poinsot, che un corpo perfettamente duro, pel solo fatto del moto che l' anima, offra ne' suoi differenti punti una certa apparenza di elasticità, in questo senso, che dopo l' urto si possa vedere il centro di gravità del corpo riflettersi in dietro, ovvero precipitarsi innanzi con una nuova velocità che può essere non solo eguale ma ben anche superiore a quella di prima, quasichè nel punto di contatto esista qualche molla interposta.» La molla interposta non è altro che il moto di rotazione che nell' urto si decompone e si cangia in parte in moto di traslazione, o viceversa.

De' centri di riflessione e di progressione con data velocità.

22. Nel rivolgimento del corpo intorno ad $E\theta$, si è veduto che que' punti P che si muovono in senso retrogrado, ove urtino contro un ostacolo fisso, diventano *centri di progressione,* ossia *rendono più celere il moto di traslazione;* e che i loro punti conjugati Q, i quali si muovono nel senso diretto, divengono urtando *centri di riflessione,* ossia *fanno rimbalzare indietro il centro di gravità.*

1° *Tra i centri Q di riflessione trovar quelli ne' quali, per l' urto, il centro di gravità O si riflette con data velocità* $= nv$.

Si tratta di determinare OQ mediante la data relazione:

$$nv = -\frac{P}{\mu} = -v\frac{FQ}{PQ} = v\frac{(QO + OF)\,OQ}{(PO + OQ)\,OQ},$$

la quale, fatto $OQ = \omega$, si riduce ad

$$n = \frac{(f - \omega)\,\omega}{\omega^2 + ef}.$$

Qui si vede che, supponendosi $n > 0$, il 2° membro dell'equazione non può essere uguale al 1° senza ammettere che le sue radici reali OQ debbano esser positive e minori di $f = OF$. Le radici di cotesta equazione, ossia dell'equivalente

$$(n + 1)\,\omega^2 - f\omega + nef = 0,$$

espresse da

$$OQ = \frac{f \pm \sqrt{f\,[f - 4n\,(n + 1)\,e]}}{2\,(n + 1)},$$

manifestano che il più gran valore di n, coefficiente di v, dovendo verificare la condizione $f - 4n\,(n + 1)\,e = 0$, è

$$n = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right],$$

e che, ove ciò si verifichi, esisteranno tra O ed F due punti Q capaci di produrre, nello scontro col punto fisso, la riflessione data $= -nv$.

2° *Tra i centri* P *di progressione trovar quelli ne' quali, per l'urto, il centro di gravità viene spinto innanzi con data velocità* $nv > v$.

La distanza OP si determina mediante la relazione data

$$nv = \frac{Q}{\mu} = v\,\frac{(PO + OF)\,PO}{(PO + OQ)\,PO},$$

la quale, fatto $PO = \omega$, si riduce a

$$n = \frac{\omega^2 + f\omega}{\omega^2 + ef}.$$

Supponendosi $n > 1$, affinchè il 2° membro possa accordarsi col 1°, le radici reali PO dell'equazione debbono risultare evidentemente positive e maggiori di e, ossia di EO; ed essendo espresse da

$$PO = \frac{f \pm \sqrt{f\,[f - 4n\,(n - 1)\,e\,]}}{2\,(n - 1)},$$

fanno palese che il più gran valore che possa darsi al coefficiente n, è

$$n = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{f}{e}\right)}\right];$$

e che, ove ciò si verifichi, questo problema come il precedente ammette due soluzioni.

In ambedue i problemi le due soluzioni si riducono ad una sola nel caso della massima velocità, ed i risultati coincidono con quelli già trovati.

De' centri di conversione e di più rapida rotazione con data velocità angolare.

23. Se la rotazione del corpo intorno all'asse $E\theta$ si concepisce decomposta nelle rotazioni parziali $\theta\frac{\overline{EQ}}{\overline{PQ}}$, $\theta\frac{\overline{PE}}{\overline{PQ}}$ intorno a due assi conjugati $P\theta$, $Q\theta$, posti entrambi dalla stessa parte di $E\theta$, in tal caso ognuno de' punti P sarà come si è veduto un centro di rotazione più rapida, ed ognuno de' punti Q sarà un centro di rotazione retrograda o di conversione.

1° *Tra i centri Q di conversione trovar quelli ne' quali, per l'urto, la rotazione cangiando di senso si fa con data velocità angolare* $= -n\theta$.

La distanza OQ si determina mediante la relazione data

$$n\theta = -\theta\frac{\overline{PE}}{\overline{PQ}} = \theta\frac{(EO + OP)\,OQ}{(PO + OQ)\,OQ},$$

la quale, fatto $OQ = \omega$, si riduce a

$$n = \frac{e(\omega - f)}{\omega^2 + ef}.$$

Supponendosi $n > 0$, affinchè vi sia concordia tra il 1° e il 2° membro, le radici reali OQ debbono evidentemente risultare positive e maggiori di $f = OF$; ed essendo espresse da

$$OQ = \frac{e \pm \sqrt{e[e - 4n(n+1)f]}}{2n}$$

manifestano che il più gran valore che possa darsi ad n, coefficiente di θ, è

$$n = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{e}{f}\right)}\right].$$

2° *Tra i centri P di più rapida rotazione trovar quelli ne' quali, per l'urto, la rotazione si fa con data velocità angolare* $n\theta > \theta$.

La distanza PO si ottiene dalla relazione

$$n\theta = \theta\frac{\overline{EQ}}{\overline{PQ}} = \theta\frac{(EO + OQ)\,OP}{(PO + OQ)\,OP},$$

la quale, fatto $\mathrm{PO} = \omega$, si riduce ad

$$n = \frac{e\omega + ef}{\omega^2 + ef}.$$

Supponendosi $n > 1$, affinchè il 2° membro possa riuscire uguale al 1°, le radici reali PO dovranno essere positive e minori di $e = \mathrm{EO}$; ed essendo espresse da

$$\mathrm{PO} = \frac{e \pm \sqrt{e[e - 4n(n-1)f]}}{2n}$$

fanno manifesto che il più gran valore che possa darsi ad n, è

$$n = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{e}{f}\right)}\right].$$

Ciascuno de' due problemi ammette adunque due soluzioni, le quali si riducono ad una sola nel caso della massima velocità.

Effetti dell'urto di uno qualunque de' centri di percossa contro un punto massiccio, e viceversa.

24. Chiamo *punto massiccio* un punto in cui s'intenda concentrata una data massa. Girando il corpo intorno all'asse permanente $\mathrm{E}\theta$ colla velocità angolare θ, due punti conjugati qualunque P, Q si possono riguardare come *due punti massicci* (17)

$$\mu\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}}, \qquad \mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}}$$

animati dalle velocità $\theta.\lambda\mathrm{EP}$, $\theta.\lambda\mathrm{EQ}$, *colle quali si muovono nello spazio come se fossero affatto liberi ed isolati.* Ciò posto, se il corpo venga ad urtare col punto Q un punto libero in quiete di massa $m = n\mu$, la comunicazion del moto si farà (secondo la legge ordinaria dell'urto) come se si trattasse dell'urto tra un punto di massa $= \mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}}$ animato dalla velocità $\theta\lambda\mathrm{EQ}$, ed un punto di massa $n\mu$ che è in riposo. Ne segue che la velocità u di questo punto dopo l'urto sarà

$$u = \frac{\mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}}.\theta\lambda\mathrm{EQ}}{\mu\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PQ}} + n\mu} = \frac{\theta.\lambda\mathrm{EQ.PO.OQ}}{(\mathrm{PO} + n\mathrm{PQ}).\mathrm{OQ}},$$

ossia, ponendo $OQ = \omega$,

$$u = \frac{\theta\lambda(e+\omega)ef}{(n+1)ef+n\omega^2}$$

Se qui si fa successivamente $\omega = 0$, $\omega = OF = f$, risulta in corrispondenza

$$u = \frac{\theta\lambda e}{n+1}, \qquad u = \frac{\theta\lambda e}{n+\dfrac{e}{e+f}};$$

donde si conchiude che, sebbene il centro di gravità O ed il centro di percossa F percuotano colla stessa quantità di moto, $=\mu v$, nondimeno la velocità comunicata è maggiore nel secondo caso in cui il punto libero è percosso da una massa più piccola, animata da una velocità più grande.

Non è bisogno di avvertire che, a quel modo che già si è fatto per l' urto contro un punto fisso, si possono cercare quali tra i centri di percossa P, Q sono capaci di trasmettere a un punto massiccio la massima od una data velocità, sia nel medesimo, sia nel contrario senso del moto di traslazione del corpo.

25. Supponiamo adesso che il punto massiccio $m = n\mu$, animato dalla velocità u, venga invece ad urtare il corpo in riposo, secondo una direzione che incontri in Q la linea EF de' centri di percossa, perpendicolarmente al piano degli assi permamenti θEF. Chiamata w la velocità del punto Q dopo l' urto, questa velocità dovendo esser quella che si trasmetterebbe ad un punto libero in quiete, di massa $= \mu\frac{PO}{PQ}$, urtato dal punto m di velocità u, avrà per espressione

$$w = \frac{n\mu u}{n\mu + \mu\dfrac{PO}{PQ}} = nu\frac{PQ}{PO + nPQ}.$$

Il moto istantaneo del punto Q, considerato come centro di percossa relativo all' asse permanente $P\theta$, rappresenta intorno a quest' asse un moto di rotazione la cui velocità angolare θ si avrà dalla nota relazione

$$\theta\cdot\lambda PQ = w,$$

e per conseguenza sarà

$$\theta = \frac{nu}{\lambda(PO + nPQ)}.$$

Ponendo $OQ=\omega$, e sostituendo $PO = \frac{S}{\mu\lambda^2\omega}$, le due espressioni di w e di θ di-

ventano

$$w = nu\frac{S + \mu\lambda^2\omega^2}{(n+1)S + n\mu\lambda^2\omega^2},$$

$$\theta = n\mu u\frac{\lambda\omega}{(n+1)S + n\mu\lambda^2\omega^2}.$$

La velocità v del centro di gravità sarà

$$v = \theta.\lambda PO = nu\frac{S}{(n+1)S + n\mu\lambda^2\omega^2};$$

e nel punto Q esisterà la forza

$$Q = \mu\frac{PO}{PQ}w = \mu\frac{PO}{PQ}.\theta.\lambda PQ = \mu v = n\mu\ (u - w)$$

eguale a quella del centro di gravità O, ed alla forza perduta dal punto massiccio m.

Così conosciamo tutte le formole che rappresentano, dopo l'urto, il moto di traslazione e di rotazione del corpo; ritenendo per altro che dopo l'urto il punto massicio m non rimanga attaccato al corpo per formare un sol tutto con esso.

COROLLARII.

Supponiamo che nel punto massiccio m, mentre si conserva ***costante*** la quantita di moto mu, ***diminuisca*** la massa $m = n\mu$, ossia n, ***crescendo nella medesima proporzione*** la velocità u. Considerando l'espressione di v e di θ si scopre:

1° Che, sotto l'impulso della stessa quantità di moto

$$q = n\mu.u,$$

il corpo ***urtato*** μ prenderà un moto di traslazione (μv) ed un moto di rotazione ($S\theta$) tanto più rapido quanto più piccola nell'***urtante*** sarà la massa $n\mu$ e proporzionatamente più grande la velocità u; e che i limiti superiori a cui si accostano v e θ, al diminuire di n, sono:

$$v = \frac{q}{\mu}, \qquad \theta = q\frac{\lambda\omega}{S}.$$

2° Che, rimanendo ***costante*** tanto la ***massa*** m quanto la ***velocità*** u del corpo urtante, gli effetti dell'urto saranno diversi secondochè sarà diversa la distanza ω tra il centro di gravità O ed il punto urtato Q. Se si ha $\omega = 0$, cioè se l'urto è indirizzato precisamente al centro di gravità, il corpo non riceve che un solo moto, il moto di traslazione il più grande possibile, $= \dfrac{q}{n+1}$.

Scostandosi la direzione del medesimo urto dal centro di gravità, il moto di traslazione scema indefinitamente, se non che nasce e vi si accompagna il moto di rotazione che cresce fino ad un certo segno, al di là del quale diminuisce anch'esso indefinitamente. Il punto Q dove il moto di rotazione prende il massimo incremento, è separato dal centro di gravità O per la distanza

$$\omega = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{(n+1)\,S}{n\mu}},$$

ed in questo punto il moto di traslazione si riduce a $\frac{q}{2\,(n+1)}$, cioè alla *metà di ciò che era al centro di gravità sotto l' azione del medesimo urto.*

Che se, mantenendo costante nell' impulso la quantità di moto ($q = n\mu u$), si volesse che la forza Q trasmessa al corpo conservasse lo stesso valore al variare della distanza OQ, basterebbe assoggettare le variazioni di n e di u alla seguente legge di mutua dipendenza:

$$(l)\qquad \left\{\begin{aligned} & n\,(S + \mu\lambda^2\omega^2) = \text{cost.} = C \\ & u = \frac{q}{n\mu} = \frac{q}{\mu}\cdot\frac{S + \mu\lambda^2\omega^2}{C}, \end{aligned}\right.$$

in virtù della quale la forza Q avrebbe per espressione

$$Q = \mu v = q\frac{S}{S + C}.$$

Alla costante arbitraria C si può dare evidentemente un valore qualunque positivo.

4° Che, decomponendo la forza Q in due forze parallele E, F, applicate ai punti coniugati fissi E, F, le componenti sono espresse da

$$E = Q\frac{QF}{EF} = Q\frac{\mu\lambda^2 f\,(f-\omega)}{S + \mu\lambda^2 f^2},$$

$$F = Q\frac{EQ}{EF} = Q\frac{S + \mu\lambda^2 f\omega}{S + \mu\lambda^2 f^2}.$$

Se facciamo crescere ω, e variare n ed u conforme alla legge (l), la forza F crescerà senza misura, e potrà produrre, incontrando un ostacolo, una percossa grande quanto si vuole. Così l' effetto di una martellata contro un dato scopo, può rendersi più grande mediante una opportuna interposizione di un corpo tra lo scopo ed il martello

Formole che rappresentano le proprietà dinamiche de' centri di percossa in funzione delle loro coordinate.

26. Per le formole stabilite da principio, ove sia data la direzione lmn di un asse permanente Eθ, la sua distanza dal centro di gravità O, ed il moto istantaneo di rotazione (θdt) intorno al medesimo, tutto il resto rimane determinato. Così il centro di percossa F si ha dalle coordinate

$$a = \frac{\theta}{F}[N\cos(yv) - M\cos(zv)],$$

$$b = \frac{\theta}{F}[L\cos(zv) - N\cos(xv)],$$

$$c = \frac{\theta}{F}[M\cos(xv) - L\cos(yv)];$$

ed il piano degli assi permanenti dall'equazione

$$(Mn - Nm)\,x + (Nl - Ln)\,y + (Lm - Ml)\,z = 0,$$

essendo

$$L = Al - C'm - B'n,\quad M = Bm - A'n - C'l,\quad N = Cn - B'l - A'm.$$

Questo piano, segando l'ellissoide centrale

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,(A'yz + B'zx + C'xy) = \text{cost.}$$

vi segnerà un' ellisse, che diremo *ellisse centrale* rispetto al detto piano.

Essendo in nostro arbitrio la scelta degli assi rettangoli Ox, Oy, Oz, prenderemo per Ox, Oy gli *assi principali* dell' ellisse centrale, i quali hanno la proprietà di soddisfare alla condizione

$$C' = \int xy\,d\mu = 0,$$

ed in questa ipotesi cercheremo le formole che ci occorrono. L' equazione dell' ellisse centrale sarà ciò che diventa l' equazione dell' ellissoide ponendovi $z = 0$, $C' = 0$, e l'arbitraria cost. $= \frac{AB}{\mu}$, vale a dire sarà

$$Ax^2 + By^2 = \frac{AB}{\mu}.$$

L' asse Oz, perpendicolare in O al piano degli assi permanenti, avrà la direzione Ov

del moto di traslazione. Ma la linea Ov essendo, in forza delle premesse, perpendicolare alle direzioni lmn, LMN delle due rette $O\theta$, OG, assi della rotazione θ e della coppia risultante $G\theta$, si avrà necessariamente $n=0$, $N=0$. Ora $N=0$ si riduce all'equazione

$$A'm + B'l = 0,$$

che serve a determinare la direzione lm degli assi permanenti che appartengono al piano xy.

Per questa scelta degli assi Ox, Oy, Oz, l'espressioni di L, M, G, S si riducono a

$$\begin{cases} L = Al, & G^2 = A^2l^2 + B^2m^2, \\ M = Bm, & S = Al^2 + Bm^2. \end{cases}$$

L'equazione $Lx + My = 0$, che rappresenta la linea de' centri di percossa EF, conjugata alla direzione lm di $O\theta$, diviene

$$Alx + Bmy = 0;$$

donde

$$\frac{l}{-By} = \frac{m}{Ax} = \frac{1}{\sqrt{(A^2x^2 + B^2y^2)}},$$

e si ottiene espresso in x, y il rapporto

$$\frac{G^2}{S} = \frac{A^2l^2 + B^2m^2}{Al^2 + Bm^2} = \frac{AB\,(x^2 + y^2)}{Ax^2 + By^2},$$

che deve sussistere dovunque si prenda il punto xy sulla linea EF. Se supponiamo che questo punto segni sopra EF l'estremità di un semidiametro R dell'ellisse centrale $\mu\,(Ax^2 + By^2) = AB$, cosicchè risulti $R^2 = x^2 + y^2$, il rapporto precedente diverrà $=\mu R^2$. Ciò posto, la legge

$$\mu\,EO.OF = \mu PO.OQ = \frac{G^2}{S}$$

onde sono conjugati a due a due i centri di percossa (15), acquista la forma tutta geometrica

$$EO.\,OF = PO.OQ = R^2.$$

27. Supponiamo in secondo luogo che xy dinoti un punto qualunque Q di EF, ed x_1y_1 il punto P conjugato a Q. Sarà

$$OQ^2 = x^2 + y^2, \qquad \frac{OP}{OQ} = \frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y}.$$

Di qui, se si pone mente a

$$\frac{OP}{OQ} = -\frac{PO.OQ}{OQ^2} = \frac{-G^2}{\mu S.OQ^2} = \frac{-AB}{\mu(Ax^2 + Bx^2)},$$

si raccolgono le seguenti relazioni de' punti conjugati

$$(1) \qquad x_1 = -x\frac{AB}{\mu(Ax^2 + By^2)}, \qquad y_1 = -y\frac{AB}{\mu(Ax^2 + By^2)};$$

$$(2) \qquad \mu(Ax_1x + By_1y) + AB = 0;$$

$$(3) \qquad \frac{PO}{AB} = \frac{OQ}{\mu(Ax^2 + By^2)} = \frac{PQ}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB};$$

nelle quali è lecito di alternare le lettere x, y, Q colle lettere x_1, y_1, P.

Quando il punto Q, xy, coincide col punto F, ab, e per conseguente il punto P col punto E, si avrà

$$\frac{f}{e} = \frac{OF}{EO} = \frac{\mu(Aa^2 + Bb^2)}{AB}.$$

28. L'espressioni delle coordinate a, b del centro di percossa F, che si sono riportate qui sopra, si mutano nelle

$$a = -\frac{\theta}{F}N = -\frac{\theta}{F}Bm,$$

$$b = \frac{\theta}{F}L = \frac{\theta}{F}Al,$$

le quali possono servire a darci le componenti $L.\theta$, $M.\theta$ della coppia che nasce dal trasportare la forza F dal punto ab al centro di gravità O:

$$Al\theta = Fb, \quad Bm\theta = -Fa,$$

non che i valori della rotazione θ e della direzione lm del suo asse:

$$\theta = \frac{F}{AB}\sqrt{\left(A^2a^2 + B^2b^2\right)}; \qquad l = \frac{F}{\theta}\cdot\frac{b}{A}, \qquad m = -\frac{F}{\theta}\cdot\frac{a}{B}.$$

29. Ora è facile trovare l'espressioni delle velocità e delle forze de' punti conjugati. Sia xy un punto di un asse permanente qualunque Hθ che incontri in H la linea EF. La velocità U del punto xy si comporrà evidentemente delle due

velocità

$$v = \frac{F}{\mu}, \qquad u = \theta . OH . \text{sen} (\theta f)$$

dovute al moto di traslazione di O, ed al moto simultaneo di rotazione intorno ad $O\theta$. Dalla geometria analitica si ha

$$OH \text{ sen} (\theta f) = ly - mx.$$

Se in $u = (ly - mx)\theta$ sostituiamo $l = \frac{Fb}{A\theta}$, $m = -\frac{Fa}{B\theta}$, otterremo

$$u = \frac{F}{AB}\left(Aax + Bby\right).$$

E poichè $U = v + v$, sarà

$$U = \frac{F}{AB}[\mu (Aax + Bby) + AB].$$

L'asse $E\theta$, per ogni punto del quale $U = 0$, avrà per equazione

$$\mu (Aax + Bby) + AB = 0,$$

la quale servirà in generale a far conoscere un asse permanente di cui sia dato il centro di percossa (a, b).

30. Se il corpo animato dalla coppia $G\theta = \text{ris}(L, M)\theta$, non ha che un puro moto di rotazione intorno ad $O\theta$, la velocità U sarà ciò che diviene $u = (ly - mx)\theta$ quando vi si fa $l = \frac{L}{A}$, $m = \frac{M}{B}$, sarà cioè

$$U = \frac{\theta}{AB}(LBy - MAx).$$

31. Denotando per U, U_1 le velocità de' punti conjugati Q, P, ossia de' punti xy, x_1y_1, le loro forze (17)

$$Q = U.\mu\frac{PO}{PQ}, \qquad Q = U_1.\mu\frac{OQ}{PQ},$$

ove siano espresse in funzione di x, y, diventano

$$Q = F\frac{\mu (Aax + Bby) + AB}{\mu (Ax^2 + Bx^2) + AB},$$

$$P = F\frac{\mu [Ax(x - a) + By(y - b)]}{\mu (Ax^2 + By^2) + AB};$$

e nel caso che il corpo sia animato dalla sola coppia $G.\theta$,

$$Q = \mu\theta \frac{LBy - MAx}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB} = - P.$$

L'equazioni precedenti contengono la soluzione della questione: *Essendo dato un piano di assi permanenti, e con esso l'ellisse centrale che gli corrisponde, presi per assi coordinati Ox, Oy gli assi principali di quest'ellisse, trovare le formole analitiche che riguardano le proprietà geometriche e dinamiche de' centri di percossa.* Nell' articolo seguente si applicheranno queste formole ai punti de' piani principali relativi al centro di gravità, e per questa via diretta si ritroveranno i risultati di Poinsot su tale argomento.

Proprietà geometriche e dinamiche de' piani principali relativi al centro di gravità.

32. Ritenendo che l'equazione $\mu(Ax^2 + By^2) = AB$ rappresenti l' *ellisse centrale* di uno qualunque de' tre piani principali relativi al centro di gravità, l'equazione

$$A'm + B'l = 0\,,$$

destinata a determinare la direzione lm degli assi permanenti che appartengono a questo piano xOy, si riduce ad una pura identità, per la proprietà caratteristica che hanno gli assi principali di rendere $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$.

Ne segue che, nel detto piano principale, ogni retta $Lx + My = 0$ che passi pel centro di gravità O si può riguardare come *una linea de' centri di percossa,* conjugata ad una serie di assi permanenti paralleli tra loro, aventi la direzione (lm):

$$l = \frac{L}{A}, \qquad m = \frac{M}{B}.$$

Similmente, una retta qualunque dello stesso piano

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

si può riguardare come un asse permanente

$$\mu(Aax + Bby) + AB = 0$$

che ha il suo centro di percossa nel punto (a, b) determinato dalla doppia proporzione

$$\frac{Aa}{\alpha} = \frac{Bb}{\beta} = \frac{AB}{\mu\gamma}\,,$$

e la sua direzione lm determinata da

$$\alpha l + \beta m = 0;$$

con che si farà pur nota la corrispondente linea de' centri di percossa, $Alx + Bmy = 0$.

Ad ogni punto Q, (xy), del piano corrisponderà un punto coniugato P, $(x_1 y_1)$; e la legge onde i due punti P, Q sono conjugati tra loro sarà espressa da

$$PO.OQ = R^2,$$

dove R è il semi-diametro che nell' ellisse centrale ha la direzione di PQ, e che per conseguenza varia di grandezza con questa direzione. Tra i punti P, Q avranno luogo le relazioni (1), (2), (3) trovate superiormente.

33. Sia data una retta qualunque

$$(E\theta) \qquad \mu (Aa\xi + Bb\eta) + AB = 0$$

avente il centro di percossa (a, b) nel punto F. Le lettere ξ, η dinotano le coordinate del punto corrente sulla retta $E\theta$. Consideriamo in questa linea $E\theta$ più punti (a', b'), (a'', b'') etc.

Gli assi spontanei che hanno i centri di percossa in questi punti saranno dati dall' equazioni

$$\mu (Aa'\xi + Bb'\eta) + AB = 0, \qquad \mu (Aa''\xi + Bb''\eta) + AB = 0,$$

tutte verificate dal centro di percossa (a, b) della linea $E\theta$. Dunque:

1° *Gli assi che hanno i centri di percossa sopra una retta, passano tutti per un medesimo punto, pel punto che è il centro di percossa di questa retta;*

2° *Un asse che abbia il centro di percossa nella intersezione di due o più rette, dovrà passare per i centri di percossa di queste rette;*

3° Viceversa: *Ogni retta che passi pel centro di percossa di un asse, avrà il suo centro di percossa su quest' asse.*

34. Dato, intorno alla retta arbitraria

$$(E\theta) \qquad \mu (Aa\xi + Bb\eta) + AB = 0,$$

il moto rotatorio (θdt) rappresentato dalla forza F del centro di percossa (a, b), *trovare di qual percussione* Q *sarebbe capace un punto qualunque* (x, y) *del piano principale* xOy.

Sia M il centro di percossa relativo alla retta FQ: questo punto M dee cadere sull' asse $E\theta$. L'asse permanente che ha il centro nel punto Q od xy, passerà per M, e sarà

$$(MQ') \qquad \mu (Ax\xi + By\eta) + AB = 0.$$

(fig. 4.)

Questa retta sia incontrata nel punto (a', b'), che noto per Q', da FQ. L'asse che ha il centro di percossa nel punto $Q', (a'b')$, intersezione delle due linee FQ, MQ', sarà la retta MQ che unisce i centri di percossa M, Q di tali rette, e si avrà

$$(\text{MQ}) \qquad \mu(\text{A}a'x + \text{B}b'y) + \text{AB} = 0.$$

Ciò posto, la forza F che nel punto (a, b) rappresenta il moto rotatorio del corpo intorno ad MEθ, s'immagini decomposta in due forze parallele Q, Q' applicate ai punti (x, y), (a', b')

$$\text{Q} = \text{F}\frac{\text{FQ}'}{\text{QQ}'}, \qquad \text{Q}' = \text{F}\frac{\text{QF}}{\text{QQ}'},$$

le quali rappresenteranno due moti rotatorii parziali intorno ad MQ', MQ, equivalenti al moto totale intorno ad MEθ. Ne segue che, ove la forza Q sia distrutta nell'incontro di un ostacolo o punto fisso, resterà nel corpo la forza Q', che rappresenta un puro moto di rotazione intorno alla retta MQ passante pel punto fisso Q. Il problema sarà quindi risoluto, tostochè siano determinate le due forze Q, Q' in funzione delle coordinate x, y del punto Q.

Per la teoria delle forze parallele si hanno le

$$\text{F} = \text{Q} + \text{Q}', \qquad \text{F}a = \text{Q}x + \text{Q}'a', \qquad \text{F}b = \text{Q}y + \text{Q}'b',$$

alle quali conviene aggiungere la (MQ), ossia

$$\mu(\text{A}a'x + \text{B}b'y) + \text{AB} = 0.$$

Se in questa moltiplicata per Q, si sostituisce

$$\text{Q}'a' = \text{F}a - \text{Q}x, \qquad \text{Q}'b' = \text{F}b - \text{Q}y, \qquad \text{Q}' = \text{F} - \text{Q}$$

si ottiene

$$\text{Q} = \text{F}\frac{\mu(\text{A}ax + \text{B}by) + \text{AB}}{\mu(\text{A}x^2 + \text{B}y^2) + \text{AB}},$$

e quindi Q', = F — Q, sarà

$$\text{Q}' = \text{F}\frac{\mu[\text{A}x(x - a) + \text{B}y(y - b)]}{\mu(\text{A}x^2 + \text{B}y^2) + \text{AB}}.$$

Questa forza Q', trasportata dal punto (a', b') nel centro di gravità O, darà una coppia composta delle due (28)

$$\text{A}l.\theta' = \text{Q}'b' = \text{F}b - \text{Q}y, \qquad \text{B}m.\theta' = -\text{Q}'a' = -(\text{F}a - \text{Q}x),$$

dalle quali si trae

$$l\theta' = F\frac{\mu x(bx - ay) - B(y - b)}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB}, \qquad m\theta' = F\frac{\mu y(bx - ay) + A(x - a)}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB};$$

e così, dopo l'urto, conosceremo con qual velocità angolare θ' il corpo tenderà a girare intorno alla retta MQ avente la direzione lm.

35. *Trovare ciò che diventano le formole precedenti quando il corpo non è animato che da una sola coppia* $G.\theta = ris.\,(L, M)\,\theta$.

Il piano della coppia, perpendicolare al piano xOy, è dato dall'equazione $Lx + My = 0$, la quale si può anche riguardare come rappresentante la linea de' centri di percossa EF. La *direzione* di questa linea, siccome perpendicolare ad OG, è espressa da

$$\cos(xf) = \frac{-M}{G}, \qquad \text{sen}(xf) = \frac{L}{G}.$$

Ritenendo che al punto Q (x, y), considerato come centro di percossa, corrisponda l'asse MQ_1, si conduca per Q parallelamente ad EF la linea QQ_1 (fig. 4) fino ad incontrare in Q_1 (a_1, b_1) la retta MQ_1. Supposto M il centro di percossa della retta QQ_1, la MQ sarà l'asse che ha il centro di percossa nel punto Q_1, e si avrà

$$(MQ) \qquad \mu(Aa_1x + Bb_1y) + AB = 0.$$

Ciò stabilito, si concepisca la coppia $G.\theta$ trasportata parallelamente a sè stessa, e rappresentata da due forze $Q, -Q_1$ applicate ai punti Q, Q_1. Rispetto ai moti di rotazione intorno alle rette MQ_1, MQ, rappresentati dalle due forze $Q, -Q_1$, si potrà ripetere ciò che si è detto qui sopra. Fatto $Q_1Q = h$, avremo

$$G.\theta = Q.h, \quad h\cos(xf) = x - a_1, \quad h\,\text{sen}(xf) = y - b_1;$$

onde

$$L\theta = G\theta\,\text{sen}(xf) = Q(y - b_1),$$

$$M\theta = -G\theta\cos(xf) = -Q(x - a_1);$$

e conseguentemente

$$Qa_1 = Qx + M\theta, \qquad Qb_1 = Qy - L\theta.$$

Sostituendo questi valori nella (MQ)

$$\mu(Aa_1x + Bby_1) + AB = 0$$

moltiplicata per Q, otterremo primieramente

$$Q = \theta\frac{\mu(LBy - MAx)}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB} = -Q_1;$$

e poscia, distrutta per l'urto la forza Q, si avrà la rotazione θ_1 intorno ad MQ trasportando la $Q_1 = - Q$ dal punto Q_1 (a_1, b_1) al punto O, e si otterrà

$$Al\theta_1 = -Qb_1 = L\theta - Qy, \qquad Bm\theta_1 = Qa_1 = M\theta + Qx,$$

donde

$$l\theta_1 = \theta \frac{\mu(Lx + My)x + BL}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB}, \qquad m\theta_1 = \theta \frac{\mu(Lx + My)y + AM}{\mu(Ax^2 + By^2) + AB}.$$

36. Si è veduto che qualunque sia il punto Q od (x, y) del piano principale, a questo punto corrisponde sempre un punto coniugato P (x_1, y_1). Richiamando l'espressioni in x, y tanto della velocità U del punto Q, quanto del rapporto $\frac{PO}{PQ}$, si scopre che la formola or trovata in x, y per la forza Q, è precisamente quella che esprime il prodotto $U.\mu\frac{PO}{PQ}$. Dunque il valore della forza Q è pure espresso da $Q = U.\mu\frac{PO}{PQ}$

Per la medesima ragione, se U_1 è la velocità del punto P, la forza di questo punto avrà per misura $P = U_1.\mu\frac{OQ}{PQ}$; e, ciò che è notabile, se questa forza si esprime in funzione di x, y, la sua espressione è identica a quella della forza Q'. Le forze P e Q' sono adunque uguali tra loro in grandezza, benchè siano forze di punti diversi (x_1, y_1), (a', b'), e rappresentanti di moti rotatorii diversi intorno ad assi che s'incrociano nel punto Q.

Le formole

$$Q = U.\mu\frac{PO}{PQ}, \qquad P = U_1.\mu\frac{OQ}{PQ}$$

esprimono la seguente proprietà generale de' piani principali relativi al centro di gravità.

Quando un corpo gira sopra una retta situata ad arbitrio in uno de' piani principali d' inerzia, se si vuole conoscere di qual percussione sia capace un punto qualunque Q *di questo piano, basta determinare il punto* P *conjugato a* Q: *i due punti conjugati percuoteranno come due punti massicci che si fossero spartita tra loro la massa intera del corpo in ragione inversa delle loro distanze al centro di gravità.*

Ne' piani non principali, questa proprietà non sussiste che pe' soli punti contenuti nella linea de' centri di percossa, e nella sola ipotesi che la rotazione avvenga intorno ad uno degli assi permanenti di esso piano.

37. ***Trovare**, in un dato piano principale, **il luogo de' punti capaci di una data percussione*** $Q = nF$.

L'equazione in x, y del valore di Q, facendovi $Q = nF$, diventa

$$n\mu\left(\frac{x^2}{B}+\frac{y^2}{A}\right)-\mu\left(\frac{ax}{B}+\frac{by}{A}\right)=-(n-1),$$

e rappresenta un'ellisse simile all'ellisse centrale. Se l'origine delle coordinate si trasporta nel centro di questa ellisse, ponendo

$$x=\xi+\frac{a}{2n}, \qquad x=\eta+\frac{b}{2n},$$

e se si richiama il rapporto $\frac{\mu(Aa^2+Bb^2)}{AB}=\frac{f}{e}$, cotesta equazione si muta nella

$$4n^2\mu\left(\frac{\xi^2}{B}+\frac{\eta^2}{A}\right)=\frac{f}{e}-4n(n-1).$$

Affinchè questa ellisse riesca reale, si richiede evidentemente che il massimo valore del prodotto $4n(n-1)$ non ecceda $\frac{f}{e}$. Ne segue che i più grandi valori di n debbono ricavarsi dall'equazione $\frac{f}{e}-4n(n-1)=0$, e sono

$$n=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{\left(1+\frac{e}{f}\right)}\right].$$

Questi valori corrispondono alle coordinate $\xi=0$, $\eta=0$, e per conseguenza ad

$$x=\frac{a}{2n}, \qquad y=\frac{b}{2n},$$

che determinano due punti sulla linea EF de' centri di percossa. Dunque:

In un piano principale, i punti capaci della massima percussione si trovano sulla linea de' centri di percossa, relativa all' asse spontaneo di rotazione $E\theta$, *come ne' piani non principali.*

Se il corpo non avesse che un puro moto di traslazione, vale a dire se fosse $a=0$, $b=0$, (ciò che rende $\frac{f}{e}=0$), risulterebbe

$$n^2\mu\left(\frac{\xi^2}{B}+\frac{\eta^2}{A}\right)=n(1-n), \qquad \text{ed} \qquad n<1,$$

cioè la percussione di cui sarebbe capace un punto qualunque, riuscirebbe sempre inferiore a quella del centro di gravità.

La stessa ricerca può farsi quando il corpo è animato da una sola coppia $G\theta$, e si arriva a conclusioni simili.

38. Siccome in un piano principale ad ogni retta corrisponde un centro di percossa, e viceversa, così ad una curva considerata come *inviluppo* di rette corrisponde

un' altra curva, *luogo de' centri di percossa di tali rette.* In queste due curve, che diremo *correlative,* le tangenti sono *coniugate a due a due per modo che il punto di contatto dell' una è centro di percossa dell' altra.* Infatti nell' una delle due curve, l' intersezione di due tangenti che tendono a confondersi in una sola, deve essere il centro di percossa di un asse il quale, nell' altra curva, passi pe' centri di percossa di tali tangenti, ossia per due punti di questa curva che tendono a riunirsi in un punto solo. Passando ai limiti, si hanno in sostanza due tangenti *correlative* nelle quali il punto di contatto dell' una è il centro di percossa dell' altra.

39. Data l'equazione di una delle due curve correlative, per passare a quella dell' altra giova rendere omogenee le coordinate cartesiane, scrivendo $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right)$ sotto la condizione di fare negli ultimi risultati $z = 1$, $\zeta = 1$. Per questa convenzione si potranno scrivere sotto la forma seguente

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0, \qquad \frac{x}{B}\xi + \frac{y}{A}\eta + \frac{z}{\mu}\zeta = 0,$$

le due equazioni

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0, \qquad \mu(Ax\xi + By\eta) + AB = 0$$

che servono a collegare una retta $\alpha\beta\gamma$ col suo centro di percossa xyz. Così dato il centro di percossa xyz, la retta $\alpha\beta\gamma$ che gli corrisponde è

$$\alpha = \frac{x}{B}, \qquad \beta = \frac{y}{A}, \qquad \gamma = \frac{z}{\mu};$$

e viceversa, data la retta $\alpha\beta\gamma$, il centro di percossa xyz che le corrisponde è

$$x = B\alpha, \qquad y = A\alpha, \qquad z = \mu\gamma.$$

Laonde, se i punti successivi di una linea $\varphi(x, y, z,) = 0$, si riguardano come centri di percossa di altrettante rette $\alpha\beta\gamma$, queste rette inviluppperanno un' altra linea, la cui equazione in coordinate α, β, γ di rette sarà $\varphi(B\alpha, A\beta, \mu\gamma) = 0$.

Si sa dall' altra parte (*Memoria sui sistemi semplici delle coordinate,* inserita nel vol. III serie II delle Memorie delle Scienze dell' Istituto di Bologna, an. 1863) che in una linea $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ riguardata come inviluppo di rette, data una retta tangente $\alpha\beta\gamma$, il punto di contatto xyz in coordinate di punti è

$$x = \frac{df}{d\alpha}, \qquad y = \frac{df}{d\beta}, \qquad z = \frac{df}{d\gamma};$$

a quel modo medesimo che in una linea $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ riguardata come luogo di punti, dato il punto di contatto $\xi\eta\zeta$, la tangente $\alpha\beta\gamma$ in coordinate di rette è

$$\alpha = \frac{d\varphi}{d\xi}, \qquad \beta = \frac{d\varphi}{d\eta}, \qquad \gamma = \frac{d\varphi}{d\zeta}.$$

Con questi principii, data in un piano principale l'equazione di una delle due curve correlative, sia come inviluppo di assi, sia come luogo de' centri di percossa, si troverà nel modo più diretto l'equazione dell'altra. Per esempio, sia data in coordinate di punti l'ellisse

$$a\xi^2 + b\eta^2 - c\zeta^2 = 0.$$

La tangente $\alpha\beta\gamma$ nel punto $\xi\eta\zeta$ è

$$\alpha = a\xi, \quad \beta = b\eta, \quad \gamma = -c\zeta.$$

Il centro di percossa xyz corrispondente a questa tangente, si avrà da

$$\frac{x}{\mathrm{B}} = a\xi, \qquad \frac{y}{\mathrm{A}} = b\eta, \qquad \frac{z}{\mu} = -c\zeta.$$

Se nell'equazione della curva si sostituisce

$$\xi = \frac{x}{a\mathrm{B}}, \qquad \eta = \frac{y}{b\mathrm{A}}, \qquad \zeta = -\frac{z}{c\mu},$$

avremo la nuova ellisse

$$\frac{x^2}{a\mathrm{B}^2} + \frac{y^2}{b\mathrm{A}^2} - \frac{z^2}{c\mu^2} = 0$$

correlativa della prima, vale a dire, in queste due ellissi le tangenti sono coniugate a due a due per modo che il punto di contatto dell'una è centro di percossa dell'altra.

Se si prende $a = \frac{1}{\mathrm{B}}$, $b = \frac{1}{\mathrm{A}}$, $c = \frac{1}{\mu}$, le due ellissi si confondono con quella che si è chiamata l'ellisse centrale. Nell'ellisse centrale adunque una tangente ha il centro di percossa all'estremità del diametro che passa pel punto di contatto.

Similmente data la parabola

$$\eta^2 - 2p\xi\zeta = 0,$$

sostituendo $$\xi = -\frac{z}{p\mu}, \quad \eta = \frac{y}{\mathrm{A}}, \quad \zeta = -\frac{x}{p\mathrm{B}},$$

si avrà la nuova parabola

$$y^2 - 2\frac{\mathrm{A}^2}{p\mathrm{B}}xz = 0,$$

correlativa della prima. Se si fa $p = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}}}$, le due parabole coincidono in una sola, la quale possiede la proprietà che le tangenti di un ramo hanno il centro di percossa sull'altro ramo.



RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ

PAR MICHAEL ROBERTS.

J'ai publié dans quelques Mémoires insérés dans le « *Quarterly Iournal of Mathematics* » un examen des propriétés principales des fonctions fondamentales des différences des racines d'une équation du cinquième degré, quand ces fonctions sont exprimées par les coefficients de l'équation. Dans l'article actuel je me propose de les considérer sous un autre rapport, savoir, quand on les regarde comme dépendant immédiatement des racines elles-mêmes. Ces deux manières de les envisager sont nécessaires pour avoir une connaissance parfaite du sujet dont il s'agit, et nous conduisent aux résultats qu'il serait pénible de trouver par d'autres moyens.

Si α, β, γ, δ sont les racines de l'équation

$$a_0 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

on sait qu'on a

$$a_0^2\left\{(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2\right\} = 24(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\,,$$

$$a_0^3\left\{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)\right\} \times \left\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) + (\alpha-\delta)(\gamma-\beta)\right\} \times \left\{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\right\}$$
$$= -432(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3).$$

Je vais maintenant chercher des résultats semblables pour l'équation du cinquième degré

$$a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0$$

et d'abord je rappelerai le tableau suivant de fonctions des différences des racines de cette équatïon, qui se trouve dans mes anciens Mémoires,

$$H = a_1^2 - a_0a_2\,, \quad I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3\,,$$

$$K = 4(a_0a_4 - 4(a_1a_3 + 3a_2^2)(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2) - (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)$$

$$L = a_0^2(a_4^2 - a_3a_5) + 3a_0a_1(a_2a_5 - a_3a_4) + 4a_0a_2(a_3^2 - a_2a_4) + 2a_1^2(a_3^2 - a_1a_5) + 5a_1^2a_2a_4 + 3a_2^4 - 8a_1a_2^2a_3\,;$$

$$\begin{aligned} R = {} & 12a_1^2a_2a_3a_5 + 15a_1^2a_2a_4a_4^2 - 10a_1^2a_3^2a_4 + 20a_1a_2a_3^3 - 8a_0a_1a_3^2a_5 - 30a_1a_2^2a_3a_4 \\ & + 2a_0a_1a_3a_4^2 - 6a_1a_2^3a_5 - 10a_2^3a_3^2 + 2a_0a_2^2a_3a_5 + 15a_2^4a_4 - 14a_0a_2^2a_4^2 - 6a_1^3a_4a_5 \\ & + 4a_0a_1a_2a_4a_5 + 22a_0a_2a_3^2a_4 + 2a_0^2a_3a_4a_5 - a_0^2a_4^3 + a_0a_1^2a_5^2 - a_0^2a_2a_5^2 - 9a_0a_3^4\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = {} & (a_0a_2a_5 - a_0a_3a_4 - a_1^2a_5 + a_1a_3^2 + a_1a_2a_4 - a_2^2a_3)^2 \\ & -3(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3)(a_0a_3a_5 - a_0a_4^2 - a_1a_2a_5 + a_1a_3a_4 + a_2^2a_4 - a_2a_3^2)\,. \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions sont liées par les équations suivantes

$$a_0R = I^3 - 9J^2 - 2IL - HK\,, \qquad a_0T = RH + (3L - I^2)J$$

$$L^2 = 4HT + K(HI + a_0J) + I(12J^2 + 2IL - I^3).$$

Si α, β, γ, δ, ε sont les racines de l'équation dònt il s'agit, posons

$$\begin{aligned} I_1 &= (\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2 \\ I_2 &= (\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2 \\ I_3 &= (\alpha-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2 \\ I_4 &= (\alpha-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2 \\ I_5 &= (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2 \end{aligned}$$

et l'on trouve facilement la relation suivante

$$a_0^2(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = 200I \qquad (1)$$

Posons encore

$$\begin{aligned} J_1 &= \{(\beta-\delta)(\gamma-\varepsilon)+(\beta-\varepsilon)(\gamma-\delta)\} \times \{(\beta-\gamma)(\delta-\varepsilon)+(\beta-\varepsilon)(\delta-\gamma)\} \times \{(\beta-\gamma)(\varepsilon-\delta)+(\beta-\delta)(\varepsilon-\gamma)\} \\ J_2 &= \{(\alpha-\delta)(\gamma-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\delta)\} \times \{(\alpha-\gamma)(\delta-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\delta-\gamma)\} \times \{(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\delta)(\varepsilon-\gamma)\} \\ J_3 &= \{(\alpha-\delta)(\beta-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\beta-\delta)\} \times \{(\alpha-\beta)(\delta-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\delta-\beta)\} \times \{(\alpha-\beta)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\delta)(\varepsilon-\beta)\} \\ J_4 &= \{(\alpha-\gamma)(\beta-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)\} \times \{(\alpha-\beta)(\gamma-\varepsilon)+(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\beta)\} \times \{(\alpha-\beta)(\varepsilon-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\beta)\} \\ J_5 &= \{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)\} \times \{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)\} \times \{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\} \end{aligned}$$

et l'on a

$$a_0^2(J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) = -6000J \qquad (2)$$

Partageons maintenant les racines α, β, γ, δ, ε en cinq groupes contenant chacun

quatre racines distinctes; en ne considérant que le groupe $(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ formons avec ces racines et la racine qui reste (α) un terme $(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2$: il est clair que six tels termes existent, dont la somme en désignant par N_1 on peut écrire

$$N_1 =$$
$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\beta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2$$
$$+ (\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2.$$

En traitant successivement d'une manière semblable les autres groupes, on peut former les fonctions N_2, N_3, N_4, N_5, qui en vertu de la loi de leur formation deviennent

$$N_2 =$$
$$(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\beta-\alpha)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\beta-\alpha)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2$$
$$+ (\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2 + (\beta-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2(\alpha-\delta)^2 + (\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\alpha-\gamma)^2$$

$$N_3 =$$
$$(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\gamma-\alpha)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2$$
$$+ (\gamma-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2 + (\gamma-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\beta)^2$$

$$N_4 =$$
$$(\delta-\alpha)^2(\delta-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\delta-\alpha)^2(\delta-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\delta-\alpha)^2(\delta-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2$$
$$+ (\delta-\beta)^2(\delta-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2 + (\delta-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2(\alpha-\gamma)^2 + (\delta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2(\alpha-\beta)^2$$

$$N_5 =$$
$$(\varepsilon-\alpha)^2(\varepsilon-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\varepsilon-\alpha)^2(\varepsilon-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\varepsilon-\alpha)^2(\varepsilon-\delta)^2(\beta-\gamma)^2$$
$$+ (\varepsilon-\beta)^2(\varepsilon-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2 + (\varepsilon-\beta)^2(\varepsilon-\delta)^2(\alpha-\gamma)^2 + (\varepsilon-\gamma)^2(\varepsilon-\delta)^2(\alpha-\beta)^2.$$

Les quantités N_1, N_2, &c. sont requises pour déterminer la manière dont la fonction R s'exprime par les racines α, β, β, δ, ε. Cette fonction est unique : c'est-à-dire c'est la seule fonction, des différences des racines qui est du cinquième degré par rapport aux coefficients, et du douzième degré par rapport aux racines : tandis que le nombre des fonctions des différences des racines, du sixième degré par rapport aux coefficients et du douzième degré par rapport aux racines est indéfini. Ces dernières sont toutes représentées par la formule

$$\theta HK + \varphi IL + \psi I^3 + \chi J^2 ,$$

θ, φ, ψ, χ étant des facteurs numériques quelconques. Or trouve donc

$$a_0^5(J_1N_1 + J_2N_2 + J_3N_3 + J_4N_4 + J_5N_5) = -2 \times 10^5 R.$$

R est l'origine du covariant lineaire et si nous désignons par $Rx + Ry$ ce covariant, on a

$$a_0^5(\alpha J_1 N_1 + \beta J_2 N_2 + \gamma J_3 N_3 + \delta J_4 N_4 + \varepsilon J_5 N_5) = 2\times 10^5 R'.$$

Si $\alpha=\beta$, on trouve

$$a_0^5(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2\left\{(\alpha-\gamma)^4(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\varepsilon)^4(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\delta)^4(\gamma-\varepsilon)^2-(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2\right\}=-20000R.$$

Si $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ alors

$$a_0^5(\alpha-\gamma)^8(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\varepsilon)^2=-10000R\,,\quad a_0^5\varepsilon(\alpha-\gamma)^8(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\varepsilon)^2=10000R'\,,$$

en sorte que si l'équation donnée a deux racines doubles, la racine simple (ε) a pour valeur $-\frac{R'}{R}$.

Quant à la fonction L je trouve la formule suivante

$$1000(I^2-3L)=$$

$$a_0^4\times\left\{\begin{array}{l}(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2\\+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2\\+(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\beta-\delta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2\\+(\beta-\varepsilon)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\varepsilon)^2\\+(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\delta)^2+(\delta-\varepsilon)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2\end{array}\right.$$

Si $Ix^2+2I'xy+I''y^2$ est le covariant dont l'origine est la fonction I, on sait qu'on a

$$K=4(II''-I'^2)$$

K étant l'invariant du quatrième degré par rapport aux coefficients. Mais, en ayant égard à l'équation (1) on trouve

$$\begin{aligned}200I' &= a_0^2(\alpha I_1+\beta I_2+\gamma I_3+\delta I_4+\varepsilon I_5)\\200I'' &= -a_0^2(\alpha^2 I_1+\beta^2 I_2+\gamma^2 I_3+\delta^2 I_4+\varepsilon^2 I_5)\end{aligned}\qquad(3)$$

en sorte qu'on a

$$10^4K=$$

$$a_0^4\times\left\{\begin{array}{l}(\alpha-\beta)^2I_1I_2+(\alpha-\gamma)^2I_1I_3+(\alpha-\delta)^2I_1I_4+(\alpha-\varepsilon)^2I_1I_5+(\beta-\gamma)^2I_2I_3\\+(\beta-\delta)^2I_2I_4+(\beta-\varepsilon)^2I_2I_5+(\gamma-\delta)^2I_3I_4+(\gamma-\varepsilon)^2I_3I_5+(\delta-\varepsilon)^2I_4I_5\end{array}\right.$$

d'où, en exécutant les multiplications indiquées on tire

$$10^4K=a_0^4(5P+3Q)$$

ou

$$P=$$

$$\begin{array}{l}(\alpha-\beta)^2(\beta-\delta)^2(\delta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\delta)^2(\delta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\varepsilon-\delta)^2(\delta-\alpha)^2\\+(\alpha-\beta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2(\beta-\delta)^2(\delta-\gamma)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2\\+(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\delta)^2(\delta-\alpha)^2+(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\varepsilon-\beta)^2(\beta-\delta)^2(\delta-\alpha)^2+(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\beta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2\\+(\alpha-\delta)^2(\delta-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2+(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)^2(\beta-\delta)^2(\delta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2+(\alpha-\delta)^2(\delta-\gamma)^2(\gamma-\beta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2,\end{array}$$

$$Q=$$

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^4+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^4$$
$$+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^4+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^4$$
$$+(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^4+(\beta-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\alpha-\delta)^4$$
$$+(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2(\alpha-\gamma)^4+(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2(\alpha-\beta)^4$$
$$+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^4+(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^4.$$

Le théorie des invariants des formes binaires du cinquième degré nous fait voir que les quantités P et Q sont identiques, ce qui peut se démontrer aussi en nous appuyant sur la seule théorie des formes du quatrième degré: pour cela nous poserons $\alpha-\beta=l$, $\alpha-\gamma=m$, $\alpha-\delta=n$, $\alpha-\varepsilon=p$: l'expression P peut donc s'écrire

$$l^2m^2(n-p)^2\{(l-n)^2(m-p)^2+(l-p)^2(m-n)^2\}+l^2n^2(m-p)^2\{(l-m)^2(n-p)^2+(l-p)^2(m-n)^2\}$$
$$+l^2p^2(m-n)^2\{(l-m)^2(n-p)^2+(l-n)^2(m-p)^2\}+m^2n^2(l-p)^2\{(l-m)^2(n-p)^2+(l-n)^2(m-p)^2\}$$
$$+m^2p^2(l-n)^2\{(l-p)^2(m-n)^2+(l-m)^2(n-p)^2\}+n^2p^2(l-m)^2\{(l-n)^2(m-p)^2+(l-p)^2(m-n)^2\}$$

ou, en mettant $F=(l-n)^2(m-p)^2+(l-p)^2(m-n)^2+(l-m)^2(n-p)^2$,

$$F\{l^2m^2(n-p)^2+l^2n^2(m-p)^2+l^2p^2(m-n)^2+m^2n^2(l-p)^2+m^2p^2(l-n)^2+n^2p^2(l-m)^2\}$$
$$-l^2m^2(l-m)^2(n-p)^4-l^2n^2(l-n)^2(m-p)^4-l^2p^2(l-p)^2(m-n)^4$$
$$-m^2n^2(m-n)^2(l-p)^4-m^2p^2(m-p)^2(l-n)^4-n^2p^2(n-p)^2(l-m)^4,$$

Maintenant si l, m, n, p sont les racines de l'équation

$$A_0t^4+4A_1t^3+6A_2t^2+4A_3t+A_4=0$$

on a

$$A_0^2F=24(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)$$

et puisqu'on a

$$A_0^2\{(l-m)^2+(l-n)^2+(l-p)^2+(m-n)^2+(m-p)^2+(n-p)^2\}=48(A_1^2-A_0A_2)$$

on tire

$$A_0^2(l^2m^2(n-p)^2+l^2n^2(m-p)^2+l^2p^2(m-n)^2+m^2n^2(l-p)^2+m^2p^2(l-n)^2+n^2p^2(l-m)^2\}=48(A_3^2-A_2A_4).$$

On a aussi

$$A_0^4\sum(l-m)^2(n-p)^4=$$
$$96\{4(A_1^2-A_0A_2)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)-3A_0(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\}$$

d'où

$$A_0^4\sum l^2m^2(l-m)^2(n-p)^4=$$
$$96\{4(A_3^2-A_2A_4)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)-3A_4(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\}$$

d'où finalement

$$A_0^4 P =$$

$$96\{8(A_3^2-A_2A_4)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)+3A_4(A_0A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\}.$$

Maintenant quand on exprime Q par les quantités l, m, n, p on trouve

$$Q =$$

$$l^2m^2(l-m)^2(n-p)^4+l^2n^2(l-n)^2(m-p)^4+l^2p^2(l-p)^2(m-n)^4+m^2n^2(m-n)^2(l-p)^4$$
$$+m^2p^2(m-p)^2(l-n)^4+n^2p^2(n-p)^2(l-m)^4+l^4(m-n)^2(m-p)^2(n-p)^2$$
$$+m^4(l-n)^2(l-p)^2(n-p)^2+n^4(l-m)^2(l-p)^2(m-p)^2+p^4(l-m)^2(l-n)^2(m-n)^2;$$

et puisqu'on a

$$A_0^4\sum(l-m)^2(l-n)^2(m-n)^2=$$

$$192\{(2A_1^2-A_0A_2)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)+3A_0(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\}$$

on déduit

$$A_0^4\sum p^4(l-m)^2(l-n)^2(m-n)^2=$$

$$192\{2(A_3^2-A_2A_4)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)+3A_4(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\}$$

d'ou vient

$$A_0^4 Q =$$

$$96\{8(A_3^2-A_2A_4)(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)+3A_4(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2-A_1^2A_4-A_2^3)\},$$

expression identique avec celle déjà trouvée pour P. On a donc

$$a_0^4 P = a_0^4 Q = 1250\,K.$$

Si $Jx^3+3J'x^2y+3J''xy^2+J'''y^3$ est le covariant dont l'origine est la fonction J, nous trouvons en vertu de l'équation (2)

$$(4)\left\{\begin{aligned} 6000J' &= a_0^2(\alpha J_1+\beta J_2+\gamma J_3+\delta J_4+\varepsilon J_5)\\ 6000J'' &= -a_0^2(\alpha^2J_1+\beta^2J_2+\gamma^2J_3+\delta^2J_4+\varepsilon^2J_5)\\ 6000J''' &= a_0^2(\alpha^3J_1+\beta^3J_2+\gamma^3J_3+\delta^3J_4+\varepsilon^3J_5)\end{aligned}\right.$$

Si $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ ce covariant devient

$$a_0^2(\alpha-\gamma)^3\{(\gamma-\varepsilon)^3(x-\alpha y)^3-(\alpha-\varepsilon)^3(x-\gamma y)^3\},$$

et a pour une de ses racines la racine simple (ε) de l'équation donnée.

Pour exprimer l'octinvariant Ω en fonction des racines, il faut se rappeler la formule connue

$$\Omega = 18\{I(J'J'''-J''^2)+I'(J'J''-JJ''')+I''(JJ''-J'^2)\}$$

d'où nous trouvons, en substituant pour I, I', I'', J, J', J'', J''' leurs valeurs données par les équations (1), (2), (3), (4)

$$2^{10}\times 5^{8}\,\Omega =$$

$$a_0^2\left\{\begin{array}{l}
(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_1J_2J_3+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)^2 I_1J_2J_4+(\alpha-\beta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_1J_2J_5\\
+(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_1J_3J_4+(\alpha-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_1J_3J_3+(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_1J_4J_5\\
+(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_2J_1J_3+(\beta-\alpha)(\beta-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_2J_1J_4+(\beta-\alpha)(\beta-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_2J_1J_5\\
+(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_2J_3J_4+(\beta-\gamma)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_1J_3J_5+(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_2J_4J_5\\
+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_3J_1J_2+(\gamma-\alpha)(\gamma-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_3J_1J_4+(\gamma-\alpha)(\gamma-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_3J_1J_5\\
+(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\beta-\delta)^2 I_3J_2J_4+(\gamma-\beta)(\gamma-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_3J_2J_5+(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2 I_3J_4J_5\\
+(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_4J_1J_2+(\delta-\alpha)(\delta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_4J_1J_3+(\delta-\alpha)(\delta-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2 I_4J_1J_5\\
+(\delta-\beta)(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_4J_2J_3+(\delta-\beta)(\delta-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2 I_4J_2J_5+(\delta-\gamma)(\delta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2 I_4J_3J_5\\
+(\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\beta)(\alpha-\beta)^2 I_5J_1J_2+(\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\gamma)(\alpha-\gamma)^2 I_5J_1J_3+(\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\delta)(\alpha-\delta)^2 I_5J_1J_4\\
+(\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\gamma)(\beta-\gamma)^2 I_5J_2J_3+(\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\delta)(\beta-\delta)^2 I_5J_2J_4+(\varepsilon-\gamma)(\varepsilon-\delta)(\gamma-\delta)^2 I_5J_3J_4
\end{array}\right.$$

Pour chercher l'expression de la fonction T par les racines α, β, γ, δ, ε, j'observe qu'on a, d'après ce que j'ai fait voir dans le *Quarterly Journal*

$$T = 9(J'^2 - JJ'').$$

ce qui donne, en substituant pour J, J', J'' leurs valeurs données par le système (4)

$$4\times 10^6\,T =$$

$$-a_0^6\left\{\begin{array}{l}
(\alpha-\beta)^2J_1J_2+(\alpha-\gamma)^2J_1J_3+(\alpha-\delta)^2J_1J_4+(\alpha-\varepsilon)^2J_1J_5+(\beta-\gamma)^2J_2J_3\\
+(\beta-\delta)^2J_2J_4+(\beta-\varepsilon)^2J_2J_5+(\gamma-\delta)^2J_3J_4+(\gamma-\varepsilon)^2J_3J_5+(\delta-\varepsilon)^2J_4J_5
\end{array}\right.$$

et si $Tx^2 + T'xy + T''y^2$ est le covariant dont l'origine est T nous tirons

$$4\times 10^6\,T' =$$

$$a_0^6\left\{\begin{array}{l}
(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2J_1J_2+(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)^2J_1J_3+(\alpha+\delta)(\alpha-\delta)^2J_1J_4+(\alpha+\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)^2J_1J_5+(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)^2J_2J_3\\
+(\beta+\delta)(\beta-\delta)^2J_2J_4+(\beta+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)^2J_2J_5+(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)^2J_3J_4+(\gamma+\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)^2J_3J_5+(\delta+\varepsilon)(\delta-\varepsilon)^2J_4J_5,
\end{array}\right.$$

$$4\times 10^6\,T'' =$$

$$-a_0^6\left\{\begin{array}{l}
\alpha\beta(\alpha-\beta)^2J_1J_2+\alpha\gamma(\alpha-\gamma)^2J_1J_3+\alpha\delta(\alpha-\delta)^2J_1J_4+\alpha\varepsilon(\alpha-\varepsilon)^2J_1J_5+\beta\gamma(\beta-\gamma)^2J_2J_3\\
+\beta\delta(\beta-\delta)^2J_2J_4+\beta\varepsilon(\beta-\varepsilon)^2J_2J_5+\gamma\delta(\gamma-\delta)^2J_3J_4+\gamma\varepsilon(\gamma-\varepsilon)^2J_3J_5+\delta\varepsilon(\delta-\varepsilon)^2J_4J_5
\end{array}\right.$$

L'invariant du douzième degré par rapport aux coefficients étant $T'^2 - 4TT''$ nous tirons pour cet invariant l'expression suivante au moyen des différences des racines

$$a_0^{12}\left\{\begin{array}{l}
(\alpha-\beta)^6 J_1^2 J_2^2 + (\alpha-\gamma)^6 J_1^2 J_3^2 + (\alpha-\delta)^6 J_1^2 J_4^2 + (\alpha-\varepsilon)^6 J_1^2 J_5^2 + (\beta-\gamma)^6 J_2^2 J_3^2 + (\beta-\delta)^6 J_2^2 J_4^2 \\
+ (\beta-\varepsilon)^6 J_2^2 J_5^2 + (\gamma-\delta)^6 J_3^2 J_4^2 + (\gamma-\varepsilon)^6 J_3^2 J_5^2 + (\delta-\varepsilon)^6 J_4^2 J_5^2 - 5 J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 \\
-2(\alpha-\beta)^3(\alpha-\gamma)^3 J_1^2 J_2 J_3 - 2(\alpha-\beta)^3(\alpha-\delta)^3 J_1^2 J_2 J_4 - 2(\alpha-\beta)^3(\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_2 J_5 \\
-2(\alpha-\gamma)^3(\alpha-\delta)^3 J_1^2 J_3 J_4 - 2(\alpha-\gamma)^3(\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_3 J_5 - 2(\alpha-\delta)^3(\alpha-\varepsilon)^3 J_1^2 J_4 J_5 \\
-2(\beta-\alpha)^3(\beta-\gamma)^3 J_2^2 J_1 J_3 - 2(\beta-\alpha)^3(\beta-\delta)^3 J_2^2 J_1 J_4 - 2(\beta-\alpha)^3(\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_1 J_5 \\
-2(\beta-\gamma)^3(\beta-\delta)^3 J_2^2 J_3 J_4 - 2(\beta-\gamma)^3(\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_3 J_5 - 2(\beta-\delta)^3(\beta-\varepsilon)^3 J_2^2 J_4 J_5 \\
-2(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\beta)^3 J_3^2 J_1 J_2 - 2(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\delta)^3 J_3^2 J_1 J_4 - 2(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_1 J_5 \\
-2(\gamma-\beta)^3(\gamma-\delta)^3 J_3^2 J_2 J_4 - 2(\gamma-\beta)^3(\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_2 J_5 - 2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^3 J_3^2 J_4 J_5 \\
-2(\delta-\alpha)^3(\delta-\beta)^3 J_4^2 J_1 J_2 - 2(\delta-\alpha)^3(\delta-\gamma)^3 J_4^2 J_1 J_3 - 2(\delta-\alpha)^2(\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_1 J_5 \\
-2(\delta-\beta)^3(\delta-\gamma)^3 J_4^2 J_2 J_3 - 2(\delta-\beta)^3(\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_2 J_5 - 2(\delta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^3 J_4^2 J_3 J_5 \\
-2(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\beta)^3 J_5^2 J_1 J_2 - 2(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\gamma)^3 J_5^2 J_1 J_3 - 2(\varepsilon-\alpha)^2(\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_1 J_4 \\
-2(\varepsilon-\beta)^3(\varepsilon-\gamma)^3 J_5^2 J_2 J_3 - 2(\varepsilon-\beta)^3(\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_2 J_4 - 2(\varepsilon-\gamma)^2(\varepsilon-\delta)^3 J_5^2 J_3 J_4
\end{array}\right.$$

Dans un cahier recent du Journal de Borchardt M. Hermite vient d'exprimer son invariant du 18e degré par les différences des racines α, β, γ, δ, ε. Je vais maintenant faire voir comment on peut arriver à un tel résultat. Je pose, pour abréger,

$$\sum J_1 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 , \qquad \sum \alpha J_1 = \alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 + \delta J_4 + \varepsilon J_5$$

$$\sum \alpha^2 J_1 = \alpha^2 J_1 + \beta^2 J_2 + \gamma^2 J_3 + \delta^2 J_4 + \varepsilon^2 J_5 , \qquad \sum \alpha^3 J_1 = \alpha^3 J_1 + \beta^3 J_2 + \gamma^3 J_3 + \delta^3 J_4 + \varepsilon^3 J_5$$

$$\sum J_1 N_1 = J_1 N_1 + J_2 N_2 + J_3 N_3 + J_4 N_4 + J_5 N_5 ,$$

$$\sum \alpha J_1 N_1 = \alpha J_1 N_1 + \beta J_2 N_2 + \gamma J_3 N_3 + \delta J_4 N_4 + \varepsilon J_5 N_5 .$$

D'après ce que j'ai démontré dans le *Quarterly Journal* savoir que l'invariant dont il s'agit (Γ) est l'éliminant du covariant dont l' origine est la fonction J et du covariant lineaire, on trouve

$$\Gamma = \frac{1}{48 \times 10^{18}} \{J'''R^3 - 3J''R^2R' + 3J'RR'^2 - JR'^3\} =$$

$$a_0^{18}\{\sum J_1(\sum\alpha J_1 N_1)^3 - 3\sum\alpha J_1(\sum\alpha J_1 N_1)^2 \sum J_1 N_1 + 3\sum\alpha^2 J_1 \sum\alpha J_1 N_1 (\sum J_1 N_1)^2 - \sum\alpha^3 J_1(\sum J_1 N_1)^3\}$$

$$= a_0^{18}\left\{\begin{array}{l}
(\sum\alpha J_1 N_1)^2\{\sum J_1 \sum\alpha J_1 N_1 - \sum\alpha J_1 \sum J_1 N_1\} \\
-2\sum J_1 N_1 \sum\alpha J_1 N_1\{\sum\alpha J_1 \sum\alpha J_1 N_1 - \sum\alpha^2 J_1 \sum J_1 N_1\} \\
+(\sum J_1 N_1)^2\{\sum\alpha^2 J_1 \sum\alpha J_1 N_1 - \sum\alpha^3 J_1 \sum J_1 N_1\}
\end{array}\right\}$$

En sorte qu'on trouve après quelques reductions faciles

$$\frac{1}{a_0^{18}}\Gamma=$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)J_1J_2\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\beta\sum J_1N_1)^2N_1-(\sum\alpha J_1N_1-\alpha\sum J_1N_1)^2N_2\}\\
+&(\alpha-\gamma)J_1J_3\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\gamma\sum J_1N_1)^2N_1-(\sum\alpha J_1N_1-\alpha\sum J_1N_1)^2N_3\}\\
+&(\alpha-\delta)J_1J_4\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\delta\sum J_1N_1)^2N_1-(\sum\alpha J_1N_1-\alpha\sum J_1N_1)^2N_4\}\\
+&(\alpha-\varepsilon)J_1J_5\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\varepsilon\sum J_1N_1)^2N_1-(\sum\alpha J_1N_1-\alpha\sum J_1N_1)^2N_5\}\\
+&(\beta-\gamma)J_2J_3\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\gamma\sum J_1N_1)^2N_2-(\sum\alpha J_1N_1-\beta\sum J_1N_1)^2N_3\}\\
+&(\beta-\delta)J_2J_4\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\delta\sum J_1N_1)^2N_2-(\sum\alpha J_1N_1-\beta\sum J_1N_1)^2N_4\}\\
+&(\beta-\varepsilon)J_2J_5\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\varepsilon\sum J_1N_1)^2N_2-(\sum\alpha J_1N_1-\beta\sum J_1N_1)^2N_5\}\\
+&(\gamma-\delta)J_3J_4\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\delta\sum J_1N_1)^2N_3-(\sum\alpha J_1N_1-\gamma\sum J_1N_1)^2N_4\}\\
+&(\gamma-\varepsilon)J_3J_5\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\varepsilon\sum J_1N_1)^2N_3-(\sum\alpha J_1N_1-\gamma\sum J_1N_1)^2N_5\}\\
+&(\delta-\varepsilon)J_4J_5\{(\textstyle\sum\alpha J_1N_1-\varepsilon\sum J_1N_1)^2N_4-(\sum\alpha J_1N_1-\delta\sum J_1N_1)^2N_5\}
\end{aligned}
$$

Si l'équation donnée a deux racines doubles, savoir α et γ, on a

$$
\begin{aligned}
&a_0^2\,\{2(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\varepsilon)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\}=50\mathrm{H}\\
&a_0^2\,(\alpha-\gamma)^2\,\{(\alpha-\gamma)^2+2(\alpha-\varepsilon)^2+2(\gamma-\varepsilon)^2\}=100\,\mathrm{I}\\
&a_0^3\,(\alpha-\gamma)^4\,\{(\alpha-\varepsilon)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\}=-1000\,\mathrm{J}\\
&a_0^4\,(\alpha-\gamma)^4(\alpha-\varepsilon)^2\,(\gamma-\varepsilon)^2=250\,(\mathrm{I}^2-3\mathrm{L})\\
&a_0^4\,(\alpha-\gamma)^6\,(\alpha-\varepsilon)^2\,(\gamma-\varepsilon)^2=\frac{625}{2}\,\mathrm{K}\\
&a_0^6\,(\alpha-\gamma)^8\,(\alpha-\varepsilon)^2\,(\gamma-\varepsilon)^2\,\{(\alpha-\varepsilon)^2+(\gamma-\varepsilon)^2-2(\alpha-\gamma)^2\}=5\times10^5\mathrm{T}
\end{aligned}
$$

Maintenant, en posant $\alpha-\gamma=\sqrt{p}$, $\varepsilon-\alpha=\sqrt{q}$, $\gamma-\varepsilon=\sqrt{r}$ on déduit en employant les valeurs que je viens d'écrire pour H, I, J, L

$$50\mathrm{HJ}+a_0\,(3\mathrm{I}^2+\mathrm{L})=\frac{a_0^3p^2}{3000}\,\{p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr\}\,,$$

expression qui s'anéantit en vertu de la relation

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=0.$$

Comme a été déjà remarqué par M. Cayley. L'équation de Moivre, savoir

$$x^5+5fx^3+5f^2x+g=0$$

satisfait à la condition

$$50HJ + a_0(3I^2 + L) = 0$$

en sorte que si cette équation a une racine double, elle en a en même temps deux.

Pour trouver la relation qui subsiste entre H, I, J pour deux racines doubles, posons $q + r = s$ et en éliminant les quantités p et s entre les équations

$$a_0^2(2p + s) = 50H, \quad a_0^2(p^2 + 2ps) = 100I, \quad a_0^3 p^2 s = -1000J$$

on a pour la relation cherchée

$$a_0(5HI + 9a_0J)^2 - 4(25H^2 - a_0^2 I)(a_0I^2 + 15HJ) = 0.$$

Cette dernière a lieu, aussi pour l'équation de Moivre.

Je me propose maintenant de former l'équation dont le racines sont les quantités I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. Si l'équation donnée a deux racines doubles, cette équation devient

$$\{t^2 - 2p(q+r)t + 4p^2qr\}^2\{t - 2p^2\} = 0$$

en prenant t pous l'inconnue.

On a $a_0^4 \sum I_1I_2 = \theta I^2 + \varphi L$, θ et φ étant des facteurs numériques qu' on peut trouver en calculant les valeurs de la fonction symétrique $\sum I_1I_2$ et des quantités I et L pour les équations suivantes

$$(5) \qquad (x^2 - 2\sqrt{2}x + 3)^2 x = 0, \qquad (x^2 - 1)^2 x = 0$$

dont chacune a deux racines doubles : et on parvient de cette manière a la formule

$$a_0^4 \sum I_1I_2 = 2 \times 10^3(7I^2 - L)$$

Pareillement on a

$$a_0^6 \sum I_1I_2I_3 = \theta HK + \varphi IL + \psi I^3 + \chi J^2,$$

θ, φ, ψ, χ étant des facteurs numériques dont on peut trouver les valeurs en calculant les valeurs de la fonction symétrique $\sum I_1I_2I_3$ et des quantités H, I, J, K, L pour les équations

$$(6) \qquad (x^2 - 2x + 2)^2 x = 0, \qquad x^5 - x = 0.$$

On a de cette manière deux relations entre θ, φ, ψ, χ, qui jointes, à celles que donnent les équations (5) déja employées pour trouver $\sum I_1I_2$ acheveront de déterminer ces quantités. Par ce procédé nous passons à la suivante

$$a_0^6 \sum I_1I_2I_3 = 4 \times 10^4\{3HK + IL + 7I^3 + 2J^2\}.$$

Pour trouver $\sum I_1I_2I_3I_4$, j'observe que cette fonction s'annule si l'équation donnée a une racine triple : on a donc

$$a_0^8 \sum I_1I_2I_3I_4 = \theta HT + K(\varphi HI + \psi a_0 J) + I\{\chi(I^3 - 27J^2) + \tau(IL - 9J^2)\}.$$

On peut déterminer les facteurs numériques qui se trouvent dans cette formule au

moyen des valeurs que prennent la fonction symétrique $\sum I_1I_2I_3I_4$ et les quantités H, I, J, K, L, T pour les équations (5) et (6) qu'on peut joindre aux valeurs des mêmes quantites pour l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)x = 0.$$

On a ainsi cinq relations entre θ, φ, ψ, χ, τ, à l'aide des quelles nous tirons

$$a_0^8 \sum I_1I_2I_3I_4 = 4 \times 10^6 \{HT + K(HI - a_0J) + I(IL - 9J^2)\}.$$

Pour trouver la valeur du produit $I_1I_2I_3I_4I_5$ j'observe que l'expression $I_1I_2I_3I_4I_5 - 2P^2$ s'annule si $\alpha = \beta$: cette quantité est par conséquent identique avec le dernier terme de l'équation aux carrés des differences à un facteur près : et l'on trouve facilement

$$I_1I_2I_3I_4I_5 - 2P^2 = 24(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2,$$

d'où, en ayant égard à la forme connue du discriminant d'une équation du cinquième degré

$$a_0^8\, I_1I_2I_3I_4I_5 = 2 \times (1250K)^2 + 24 \times 3125\,(K^2 - 128\Omega).$$

ce qui donne

$$a_0^8\, I_1I_2I_3I_4I_5 = 32 \times 10^5(K^2 - 3\Omega).$$

Donc en prenant t pour l'inconnue de l'équation dont les racines sont I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, cette équation s'écrit de là manière suivante

$$a_0^8\, t^5 - 200\, a_0^6\, It^4 + 2 \times 10^3 a_0^4\, (7I^2 - L)t^3 + 4 \times 10^4\, a_0^2 (3HK + IL + 7I^3 + 2J^2)t^2$$
$$+ 4 \times 10^6\, \{HT + K\,(HI - a_0J) + I\,(IL - 9J^2)\}\, t - 32 \times 10^5\,(K^2 - 3\Omega) = 0.$$

Or j'ai trouvée dans un Mémoire inséré dans le *Quarterly Journal* n° 18, page 149 que si $K^2 - 3\Omega = 0$ l'équation donnée a pour une de ses racines la quantité $-\frac{H'}{H}$, en sorte que si l'une quelconque des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 s'anéantit, alors $-\frac{H'}{H}$ sera une des racines de l'équation donnée.

Je terminerai ce Mémoire en présentant l' équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$a_0x^5 + 5a_1x^4 + 10a_2x^3 + 10a_3x^2 + 5a_4x + a_5 = 0$$

sous une forme telle que les coefficients s'expriment au moyen des fonctions des différences des racines que je viens d'employer. En prenant t pour l'inconnue, écrivons l'équation dont il s'agit sous là forme suivante

$$a_0^8\, t^{10} + 100a_0^6\, P_1t^9 + 50a_0^4\, P_2t^8 + 2500a_0^2\, P_3t^7 + 125P_4t^6 + 625P_5t^5 + 2500P_6\,t^4$$
$$+ 1250P_7t^3 + 62500P_8t^2 + 62500P_9t + 3125P_{10} = 0$$

et nous avons

$$P_1 = -H\,,\quad P_2 = a_0^2\,I + 75H^2\,,\quad P_3 = -25H^3 - 2a_0^2\,HI - a_0^3\,J$$

$$P_4 = 3125H^4 + 1250a_0^2\,H^2I + 800a_0^3\,HJ - 16a_0^4\,L - 3a_0^4\,I^2$$

$$P_5 = 60a_0^2\,HL - 120a_0^2\,HI^2 - 2500H^3I - 1500a_0H^2J - 220a_0^3\,IJ - a_0^4\,K$$

$$P_6 = 19a_0^2\,IL - 17a_0^2\,I^3 - 212a_0^2\,J^2 + 7a_0^2\,HK + 1000a_0HIJ + 875H^2I^2 - 125H^2L$$

$$P_7 = 3a_0^2\,IK + 1184HJ^2 - 48HIL - 176HI^3 - 304a_0I^2J - 49H^2K + 112a_0LJ$$

$$P_8 = K(3a_0J - HI) + 4I(2I^3 - IL - 45J^2) - 28HT$$

$$P_9 = 48RJ + 16IT - K(L + I^2)$$

$$P_{10} = K^2 - 128\Omega\,.$$

Il est bon de remarquer qu'on a

$$a_0\Omega = J(12T - IK) + R(L + I^2).$$

College de la Trinité à Dublin. le 15 Février 1865.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

LE MESSÂHAT

DE

MOHAMMED BEN MOUSSA AL KHÂREZMI

EXTRAIT DE SON ALGÈBRE

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

PRÉFACE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le plus ancien algébriste arabe connu. C'est l'opinion de Zakâria ben Mohammed ben Mahmoud Al Qazouïni et de presque tous les historiens et mathématiciens de sa nation. Ibn Khaldoûn déclare expressément que le premier, parmi les Arabes, qui écrivit sur l'Algèbre, fut Abou Abdallah Al Khârezmi.

Vers l'an 820 de J. C., à la demande de l'illustre Khalife Al Mamoun, Mohammed ben Moussa composa « un ouvrage abrégé sur le calcul par *djebr et » mokâbalah*, restreint à ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile , c'est-à- » dire aux opérations dont on a sans cesse besoin dans les cas d'héritage , de » donation, de procès, dans les affaires du commerce et de la vie pratique, ou » encore pour la mesure des terres, le creusement des canaux et autres appli- » cations du calcul à la géométrie. » C'est ainsi que s' exprime notre auteur lui-même dans sa préface à son *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah*. Ce petit traité eut de nombreux commentateurs, non seulement parmi les Arabes d'Espagne, honorés d'une mention spéciale à cet égard par Ibn Khaldoûn *, mais encore parmi leurs frères d' Orient : il nous suffira de citer le

* Ibn Khaldoûn nomme Al Korachi, comme l'auteur d'un des meilleurs commentaires de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa. Ce pourrait bien être là le nom de l'auteur d'un des traités inédits qui se trouvent dans le même volume que le manuscrit de Mohammed ben Moussa, à la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford. Ce nom est complètement dépourvu de points diacritiques, c'est pourquoi M. Fréd. Rosen a lu par conjecture Al Jaza'ï, mais ce mot pourrait se lire Al Korachi, par la simple substitution d'un *chîn* au lieu d'un *aïn*, pour l'avant-dernière lettre. Le commentaire aurait été réuni tout naturellement ainsi sous la même couverture que le traité commenté. Sans toucher au corps du mot, on pourrait encore lire Al Khozâa'ï, nom bien connu dans les annales de l'Islam, puisqu'il fut porté par le Khalife Omrân ben Hosseïn Al Khozâa'ï.

célèbre Abou'l-wafâ Al Bouzdjâni, mort en 999 de J. C. L'auteur du lexique bibliographique intitulé : *Tarikh al hokama*, (1198 de J. C.), parlant des ouvrages hindous parvenus aux Arabes, s'exprime ainsi : « In manus nostras in- » cidit Liber Artis Logisticæ, a Mohammado ben Musa al Khuarezmita exornatus, » qui cæteros omnes brevitate methodi ac facilitate præstat, Indorumque in præ- » clarissimis inventis ingenium et acumen ostendit. » On sait qu'avant l'avènement d'Al Mamoun au Khalifat, c'est-à-dire avant 814 de J. C, et à la demande de ce prince, Mohammed ben Moussa avait déjà fait un Abrégé de Tables astronomiques dressées par un savant Hindou venu en 773 de notre ère à la cour d'Al Mansour, et traduites par Mohammed ben Ibrahim Al Fazâri *. Si l'on a pu contester la provenance hindoue de l'algèbre arabe, un fait historique demeure aujourd'hui incontestable : C'est que Mohammed ben Moussa Al Khârezmi est le véritable instituteur des nations de l'Europe moderne dans cette branche principale des Mathématiques. Les traductions latines de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa, faites par les savants du moyen âge, furent la source où les savants du XVI.e siècle vinrent puiser leurs connaissances algébriques. L'*ars logistica*, le calcul par Djebr de Mohammed ben Moussa, devint l'*ars magna* de Cardan et des autres mathématiciens de l'Italie, de l'Espagne, de la France, de l'Angleterre et de l'Allemagne.

L'existence d'une copie du *Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah* de Mohammed ben Moussa Al Khârezmi, parmi les manuscrits arabes de la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford, avait été dûment constatée par le catalogue de Jean Uri, mais le premier, Colebrooke, en 1817, attira sur ce précieux ms. l'attention du monde savant par la Dissertation magistrale qu'il mit en tête de son beau livre intitulé : « Algebra, with Arithmetic and Mensura- » tion, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara ». En 1831, M. Rosen publia le texte arabe tout entier en l'accompagnant d'une traduction anglaise. Quelques années plus tard, M. Libri reproduisit, dans le 1.er volume de son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (PARIS 1835, NOTE IV, page 227, lignes 11–25; pages 228–264; page 265, lignes 1–14 – A PARIS 1838, NOTE XII, page 253, lignes 12–24; pages 254–296; page 297, lignes 1–14) une traduction latine que possédait la Bibliothèque royale de Paris; mais le chapitre relatif à la géométrie, le *bâb al messâhat*, manquait. En 1846, désireux de combler cette lacune autant qu'il était alors en mon pouvoir, je publiai dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*tome cinquième*, page 557, lignes 19–20; page 558–569; page 570, lignes 1–8) une traduction faite sur la version anglaise de Rosen, de cette partie du Traité de Mohammed ben Moussa. La traduction que je donne aujourd'hui diffère en certains endroits de la première, par la raison que, au lieu d'être exclusivement fondée sur la version anglaise, elle a été faite littéralement sur le texte arabe lui-même.

AR. MARRE.

---

* Ibn Al Adami : Préfaee à ses Tables astronomiques. — Casiri, tome I, p. 427, 428. — Colebrooke : Dissertation, p. 504 des Miscellaneous Essays.

BÂB AL MESSÂHAT

(CHAPITRE DU MESSÂHAT) *.

Sache que l' expression « un par un » appartient au *Messâhat*, et signifie » *derâa* par *derâa* » **. Tout quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux, qui a pour chacun des côtés *un*, a pour sa superficie entière *un*. Si dans un quadrilatère équilatéral et équiangle, chaque coté est *deux*, alors sa superficie est quatre fois la superficie de celui qui est égal à « *derâa* par *derâa* »; de même trois par trois, et ainsi de suite en montant ou en descendant, ainsi un-demi par un-demi un quart, et de même des autres fractions. Tout carré dont chaque côté est *un-demi derâa*, est égal à un quart de celui dont chaque côté est *un derâa*, et tu fais de même pour *un tiers par un tiers*, et *un quart par un quart*, et *un cinquième par un cinquième*, et *un demi tiers par un demi tiers* ***, ou plus ou moins que cela. Dans tout carré, si l'un des côtés (est multiplié) par *un*, c'est la racine de ce carré; si par deux, deux racines; que ce carré soit petit on grand.

Dans tout triangle équilatéral, si tu multiplies la colonne par la moitié de la base sur laquelle tombe la colonne; c'est la mesure du triangle ****.

Dans tout rhombe équilatéral, si tu multiplies une des deux diagonales par la moitié de l'autre, c'est sa mesure.

---

* De même que l'ouvrage traduit du sanscrit par Colebrooke renferme trois parties: Algebra, Arithmetic, Mensuration, c'est-à-dire : Algèbre, qui fait partie de la science du nombre, Calcul proprement dit, et ce que les Arabes nomment *Messâhat*, qui fait partie de la géométrie, de même la plupart des ouvrages purement élémentaires sur le calcul, composés par les Arabes, renferment ces trois parties successivement exposées. Chacune d'elles, quand elle est traité séparément, fait l' objet d'ouvrages spéciaux beaucoup plus développés.

Littéralement *messâhat* signifie l'art de mesurer; mais comme sa principale application a été de mesurer et de diviser les terres, on a souvent traduit ce mot par géodésie. Dans son *messâhat*, Mohammed ben Moussa ne se borne pas à donner la mesure des surfaces, il donne aussi le moyen de mesurer des solides; c'est pourquoi nous conservons le terme technique arabe, *messâhat*, en tête de notre chapitre, plutôt que de le traduire par le mot géodésie. Ibn Khaldoûn, dans ses Prolégomènes, dit qu'on a écrit sur la science du *messâhat* de bons et nombreux ouvrages, mais il n'en nomme aucun.

** Le *derâa* (coudée) est l'unité linéaire; nous n'en connaissons pas la valeur exacte. Cette première phrase du texte, telle que l'a reproduite M. Rosen, est fautive. M. Rosen l'a traduite ainsi : « *Know that the meaning of the expression " one by one " is mensuration* : *one yard* (*in length*) *by* » *one yard* (*in breadth*) *being understood* ». A la page 196, dans une note sur ce passage, il dit: « *I am* » *uncertain whether my translation of the definition which Mohammed gives of mensuration be cor-* » *rect. Though the diacritical points are partly wanting in the manuscript, there can, I believe, be* » *no doubt as to the reading of the passage.* » Mohammed ben Moussa n'a point songé à donner une définition du *Messâhat*. En lisant la proposition *îlä* au lieu du pronom personnel féminin *hya*, on rétablit le véritable sens. La définition attribuée à Mohammed ben Moussa, si c' en était une, serait fausse et incomplète.

*** M. Rosen a traduit « *two thirds by a half* » c'est-à-dire $^2/_3$ par $\frac{1}{2}$. C'est $^1/_2$ tiers par $^1/_2$ tiers qu'il faut lire. La suite des fractions réprésentant la longueur de chaque côté étant $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, Mohammed ben Moussa a exprimé cette dernière à la façon arabe.

**** Mohammed ben Moussa, versé dans les sciences des Hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à l'aire du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quelconque; il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens. Une seule règle, qui convienne à tous les cas, lui paraît suffisante.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, c'est la circonférence dont il est ceint, c'est le procédé usité par les gens du vulgaire.

La famille des géomètres a deux autres méthodes; l'une d'elles, c'est que tu multiplies le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'ensuite tu prends la racine du tout; ce qui en résulte, c'est la circonférence. La seconde, celle des astronomes, c'est que tu multiplies le diamètre par 62832, et que tu divises cela par 20000; ce qui en résulte est la circonférence. Et tout cela diffère peu l'un de l'autre *.

Et la circonférence, si tu la divises par 3 et $\frac{1}{7}$, tu obtiens le diamètre.

Dans tout cercle, si tu multiplies la moitié du diamètre par la moitié de la circonférence, c'est sa mesure; en effet dans tout polygône équilatéral et équiangle, parmi les triangles, quadrilatères, pentagones, et ceux d'un plus grand nombre de côtés, si tu multiplies la moitié du périmètre par la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est sa mesure.

Dans tout cercle, si tu multiplies le diamètre par lui-même, et que tu en retranches le septième et le demi-septième, c'est sa mesure. Et cela concorde avec la formule de la première classe **.

Tout segment de cercle est assimilé à un arc. Il faut nécessairement que ce segment soit égal au demi-cercle, ou plus petit que le demi-cercle, ou plus grand que le demi-cercle. Cela est indiqué par la flèche de l'arc : si elle est égale à la moitié de la corde, le segment est égal à la moitié du cercle; si elle est plus petite que la moitié de la corde, il est plus petit que la moitié du cercle; si la flèche est plus grande que la moitié de la corde, il est plus grand

---

* Mohammed ben Moussa nous donne ici trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'Archimède. La deuxième donne $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle particulièrement en usage parmi les astronomes et la plus exacte, donne $\pi = \frac{62832}{20000}$. Ces trois valeurs sous la forme décimale, sont :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,1424\ldots, \qquad \pi = \sqrt{10} = 3,16227\ldots; \qquad \pi = \frac{62832}{20000} = 3,14160\ldots$$

La première et la troisième formule se trouvent dans le Lilavati de Bhascara, page 87 de l'introduction de Colebrooke. Seulement la troisième est donnée par le géomètre hindou sous la forme $\frac{3927}{1250}$; en multipliant par 16 chacun des termes, Mohammed ben Moussa voulut probablement lui substituer un rapport équivalent plus facile à retenir de mémoire, et plus aisé à calculer. C'est par erreur que M. Rosen a dit que la seconde se rencontrait dans le Vija Ganita de Bhascara, p. 308, 309; elle n'est pas mentionnée par cet auteur, mais bien par deux de ses prédécesseurs, Brahmagupta et Aryabhatta, qui savaient parfaitement qu'elle n'était qu'une valeur approchée du rapport.

Voici une note marginale du ms. d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe en ce moment: « Cela est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut déterminer l'exacte vérité de » ce rapport, et trouver la circonférence réelle, excepté Celui qui sait tout : car la ligne n'est pas » droite de telle sorte que son exacte longueur puisse être trouvée. Cela s'appelle une approximation, » de même que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approxima- » tion et non pas l'exacte vérité. Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode » ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$, car elle est la plus aisée et la plus expé- » ditive. Dieu sait mieux ! ».

** L'aire du cercle dont le diamètre est d, si l'on suppose $\pi = \frac{22}{7}$, est en effet égale à $\frac{22}{7 \times 4} d^2$ ou $\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \times 2}\right) d^2$. Bhascara, p. 89 du Lilavati, donne la valeur $\frac{11}{14} d^2$, comme bonne dans la pratique, lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande approximation.

que la moitié du cercle. Si tu veux connaître de quel cercle il est, multiplie la moitié de la corde par elle-même, divise par la flèche, et ajoute le résultat à la flèche; ce que tu obtiens, c'est le diamètre du cercle dont ce segment fait partie *.

Si tu veux connaître l'aire de l'arc, multiplie la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc, et garde ce produit; puis retranche la flèche de l'arc de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien s'il est plus grand que la demi-circonférence, retranche la moitié du diamètre du cercle de la flèche de l'arc; ensuite multiplie ce qui reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranche ce produit de celui que tu as gardé si l'arc est plus petit que la demi-circonférence, ou bien additionne-les ensemble si l'arc est plus grand que la demi-circonférence. Alors le résultat obtenu après l'addition ou bien la soustraction, c'est l'aire de l'arc **.

Dans tout solide quadrangulaire, si tu multiplies la longueur par la largeur, puis par la profondeur, c'est sa mesure. Si la base n'est pas quadrangulaire, mais qu'elle soit circulaire ou triangulaire ou autre, à condition que la profondeur reste égale et parallèle, pour opérer le *messâhat* de ce solide, tu calcules la surface de la base, tu sais sa mesure, tu la multiplies par la profondeur, et c'est la mesure (du solide).

Pour la pyramide, qu'elle soit triangulaire, quadrangulaire, circulaire, tu multiplies un tiers de la superficie de sa base par sa colonne, c'est là sa mesure ***.

Sache que dans tout triangle rectangle, chacun des deux plus petits côtés étant multiplié par lui-même, les produits additionnés égalent le produit du plus grand côté multiplié par lui-même. Voici qui le démontre : Je trace un quadrilatère équilatéral et équiangle ABCD, je coupe le côté AC en deux moitiés au point H, et je mène HR, puis je coupe le côté AB en deux moitiés au point T, et je mène TG. La surface ABCD est devenue quatre surfaces ayant leurs

---

* Le théorème sur lequel repose ce calcul est énoncé par Aryabhatta, ainsi qu'il suit : « dans » un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. » Quant au procédé de Mohammed ben Moussa, il est exprimé par Bhascara exactement dans les mêmes termes.

** C'est ce qu'exprime plus brièvement Behâ-Eddin dans son *Kholâçat al hisâb* : « Quant aux » deux segments, dit-il, marque bien le centre, et achève les deux secteurs; alors il se forme là un » triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment; ou bien ajoute-le » au plus grand secteur, il en résulte le plus grand segment. »

Les géomètres Hindous avaient la formule :

$$\text{Segment} = \frac{21}{20} f \left(\frac{c+f}{2}\right)$$

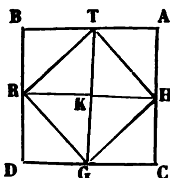
f désignant la flèche, et c la corde (page 96 du Lilavati de Bhascara).

*** Mohammed ben Moussa range sous une même dénomination les parallélipipèdes, les prismes et les cylindres, et sous une autre dénomination commune, les pyramides et les cônes. C'est ainsi que dans le Lilavati, Stance 217, cette première classe de solides se nomme *sama-chata*, et la seconde *souchi-chata* (solides aigus). Le terme arabe « *makrouttah* » qui désigne indistinctement pyramides et cônes, vient du verbe « *Kharatt* », dont l'une des significations: « être délié, effilé, menu, mince » conduit directement à la même source de dérivation que pour le terme sanscrit.

Nous remarquerons encore que la hauteur des solides de la première catégorie a le nom spécial de profondeur, tandis que la hauteur des solides de la seconde catégorie s'appelle colonne (*aamoud*), comme la hauteur d'un triangle.

On voit enfin par ce passage que le mot *messâhat* peut s'appliquer non seulement à la mesure du sol et des surfaces planes, mais aussi à la mesure des solides, et qu'ainsi il a parfois une acception plus générale que celle qu'on lui attribue d'ordinaire.

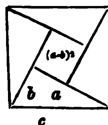
côtés et leurs angles égaux, savoir : surface AK, surface CK, surface BK et surface DK. Ensuite je tire du point H au point T une ligne, elle coupe la surface AK en deux moitiés. Cette surface a donné naissance à deux triangles, qui sont les triangles ATH et HKT. Or, il est bien évident pour nous que AT est la moitié de AB, que AH lui est égal comme moitié de AC, et que la ligne TH leur sous-tendante est la corde d'un angle droit. Je tire de même des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. L'ensemble des carrés donne naissance à huit triangles égaux, et il est bien clair pour nous que quatre de ces triangles sont la moitié de la plus grande surface, c'est-à-dire de AD. Il est évident pour nous que la ligne AT (multipliée) par elle-même est la mesure de deux des triangles, et que AH par elle-même est la mesure de deux triangles qui leur sont égaux, la somme est donc la mesure de quatre triangles. Mais d'autre part le côté HT par lui-même est la mesure de quatre triangles. Enfin il est clair pour nous que la ligne AT par elle-même et AH par elle-même donnent une somme égale au résultat de la multiplication de TH par elle-même, c'est là ce que nous voulions montrer. Voici la figure *



Sache qu'il y a cinq espèces de quadrilatères, la première dont les côtés sont égaux et les angles droits; la deuxième avec angles droits et côtés inégaux, la longueur étant plus grande que la largeur; la troisième se nomme rhombe et

* La démonstration de Mohammed ben Moussa ne s'applique qu'au cas du triangle rectangle isocèle. Elle parle aux yeux, et s'adresse évidemment à des gens que Platon n'aurait pas admis à ses leçons; ce qui nous fait voir une fois de plus et surabondamment que notre auteur était bien loin d'exposer tout ce qu'il savait, mais qu'il tâchait de vulgariser la science en la simplifiant et la mettant à la portée des plus petits. L'élégante démonstration du carré de l'hypoténuse universellement connue, se trouve dans les éléments d'Euclide ou supposés d'Euclide, car Kâdhi Zadeh Al Roumi (vir bene meritus, selon Hadji Khalfa) et le fameux Al Kendi, l'un des douze plus grands génies qui aient paru parmi les hommes selon Cardan, assurent qu'Euclide n'est pas l'auteur des Eléments qui portent son nom. Al Kendi attribue cet ouvrage de géométrie à Abolonious Al Neddjâr Al Iskanderâni. Le traité complet était divisé en quinze livres ou sections. Longtemps après la mort d'Apollonius vivait à Alexandrie un roi qui aimait et cultivait la géométrie. Parmi les mathématiciens ses contemporains brillait Euclide. Le roi le chargea de rétablir l'ouvrage en son entier et de l'expliquer. De là treize livres exposés par Euclide et qui reçurent son nom. Ensuite Hypsiclès, son disciple, découvrit les deux autres, le quatorzième et le quinzième, les ajouta aux précédents et les offrit au roi. Tel est en substance le récit d'Alkendi. (voir Hadji Khalfa, Tome 1.er p. 380.)

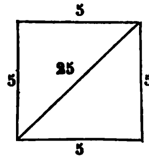
Mohammed ben Moussa ne devait pas ignorer l'ingénieuse et charmante démonstration des Hindous, fondée sur le développement algébrique de $(a-b)^2$.



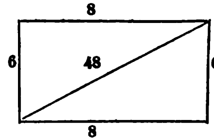
$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

c'est celle dont les côtés sont égaux et les angles différents; la quatrième est le rhomboïde, sa longueur et sa largeur sont différentes et ses angles inégaux, mais les deux longueurs sont égales entre elles et ses deux largeurs aussi égales *; la cinquième, dont les côtés et les angles sont inégaux **.

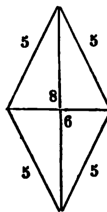
Pour la mesure des quadrilatères dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, si tu multiplies la longueur par la largeur, le résultat est la mesure. Exemples : 1° Une pièce de terre quadrangulaire dont chacun des côtés a cinq deràa, sa mesure est de vingt-cinq deràa. Voici la figure:



2° Une pièce de terre quadrangulaire; ses deux longueurs sont huit deràa, huit deràa, et ses deux largeurs six et six. Pour avoir sa mesure, tu multiplies six par huit, ce qui donne quarante - huit deràa; c'est là sa mesure. Voici la figure:



Soit le rhombe équilatéral dont chaque côté est cinq deràa, l'une de ses diagonales est huit, et l'autre six deràa. Apprends quelle est sa mesure, lorsque tu connais les deux diagonales ou l'une d'elles. Si tu connais les deux diagonales en même temps, c'est que tu multiplies l'une d'elles par la moitié de l'autre, c'est là sa mesure; ainsi tu multiplies huit par trois, ou quatre par six, ce qui fait vingt-quatre deràa, et c'est la mesure. Si tu connais une seule diagonale, tu sais bien qu'il y a deux triangles dans chacun desquels deux côtés sont cinq deràa, cinq deràa, leur troisième côté étant la diagonale. Calcule-les selon le calcul des triangles. Voici la figure :

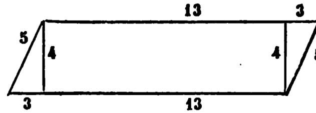


* Comme on le voit, Mohammed ben Moussa appelle longueurs les deux côtés parallèles les plus grands, et largeurs les deux autres côtés parallèles, dans le rhomboïde ou parallélogramme.

** Ce sont ces quadrilatères avec côtés et angles inégaux que Behâ Eddin nomme trapèzes. La

Pour le rhomboïde on fait comme pour le rhombe.

Pour la dernière espèce de quadrilatères, tu connais sa mesure par le moyen de la diagonale, cela conduit au calcul des triangles. Apprends-le. Voici la figure du rhomboïde :



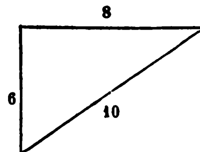
Les triangles. — Il y en a trois espèces : rectangles, acutangles et obtusangles.

Du rectangle. — Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, cette somme est égale au résultat de la multiplication du plus grand côté par lui-même.

De l'acutangle. — Dans ce triangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus grande que le plus grand côté multiplié par lui-même.

De l'obtusangle. — Dans tout triangle obtusangle, si tu multiplies chacun des deux plus petits côtés par lui-même, puis que tu fasses l'addition, la somme est plus petite que le plus grand côté multiplié par lui-même.

Le triangle rectangle est celui qui a deux colonnes et un diamètre (pour côtés); il est la moitié d'un quadrangle. Tu connais sa mesure, en multipliant un des deux côtés adjacents à l'angle droit par la moitié de l'autre. Ce qui en résulte, c'est sa mesure. Exemple d'un triangle rectangle : un de ses côtés six deràa, un de ses côtés huit deràa, et le diamètre dix. Pour faire le calcul, tu multiplies six par quatre, ce qui donne vingt-quatre deràa, et c'est la mesure. S'il te plaît de faire le calcul du triangle par la colonne, ce n'est que sur le plus grand côté que tombe sa colonne, car les deux plus petits côtés sont deux colonnes. Si tu veux cela, alors multiplie sa colonne par la moitié de sa base; ce qui en résulte, c'est sa mesure. Voici la figure :

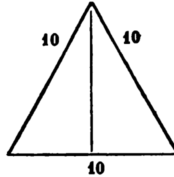


La deuxième espèce. — Soit à mesurer un triangle équilatéral acutangle dont chaque côté a dix deràa. Tu détermines d'abord son *masquèt al hadjar* * et sa colonne. Sache que dans tout triangle isocèle, si tu mènes la colonne sur la base, elle tombe à angles droits sur le milieu de la base, si les deux côtés sont

dénomination sanscrite Vishama Chatourasra qui répond au mot trapèze, s'applique chez les Hindous au quadrilatère irrégulier quelconque. C'est la signification que donne également Euclide au trapèze, c'est celle-là que lui ont conservée les Anglais jusqu'à présent, et que les Français avaient gardée intacte jusqu'à la fin du siècle dernier.

* *Masquèt al hadjar*, à la lettre : *le lieu où tombe la pierre*. C'est le pied de la hauteur du triangle, ou de la colonne selon l'expression arabe.

égaux; s'ils sont inégaux, le *masquèt al hadjar* n'est pas au milieu de la base. Mais nous savons que dans ce triangle-ci, sur quelque côté que tu opères, le *masquèt al hadjar* ne sera jamais qu'en son milieu; et c'est cinq derâa. Pour connaître la colonne, tu multiplies le cinq par lui-même, et tu multiplies un des côtés, c'est-à-dire dix, par lui-même, ce qui fait cent; tu retranches de ce produit celui de cinq par lui-même, c'est-à-dire vingt-cinq; il reste soixante-quinze. Tu en prends la racine, c'est la colonne, et elle est devenue un côté des deux triangles rectangles. Si tu veux la mesure, multiplie la racine de 75 par la motié de la base, qui est 5; pour cela tu multiplies le 5 par lui-même, afin d'avoir la racine de 75 par la racine de 25; multiplie 75 par 25, c'est 1875; prends-en la racine, c'est la mesure du triangle. Et c'est 43 et peu de chose *. Voici la figure :



Si tu as un triangle acutangle dont les côtés sont inégaux, sache que sa mesure se connaît par son *masquèt al hadjar* et sa colonne. Soit un triangle dont un côté est 15 derâa, un côté 14 derâa, et un côté 13 derâa. Si tu veux connaître son *masquèt al hadjar*, prends pour base celui des côtés qu'il te plaîra, prenons celui de 14. Son *masquèt al hadjar* tombe sur ce côté à la distance *chéy* (x) à partir de celui des deux côtés adjacents que tu voudras. Posons le *chéy* à partir de l'adjacent 13. Multiplions-le par lui-même, il devient un *mâl* (x^2); retranchons-le de treize par lui-même, c'est-à-dire de 169, cela devient 169 *moins mâl*. Nous savons que la racine de cela, c'est la colonne. Il nous est resté de la base 14 *moins chéy*. Nous multiplions ce reste par lui-même, il en résulte 196 *et mâl moins* 28 *chéy*. Nous le retranchons de 15 *par lui-même*, le reste est 29 *derhems* ** *et* 28 *chéy moins mâl*. La racine est la colonne. Or la racine de 169 *moins mâl*, c'est encore la colonne. Toutes deux sont donc égales. Compare-les, c'est que tu rejettes le mâl avec le mâl, car les deux mâl sont négatifs. Alors il reste 29 *et* 28 *chéy* égal à 169. Rejette 29 de 169, il reste 140 égal à 28 chéy. Un seul chéy est 5. C'est le *masquèt al hadjar* à partir du côté adjacent, 13. Le complément de la base, contigu à l'autre côté, c'est 9. Si tu veux connaître la colonne, multiplie ce 5 par lui-même, puis soustrais le pro-

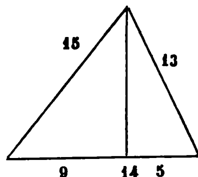
---

* $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$,

$S = h \times \frac{b}{2} = \sqrt{75} \times 5 = \sqrt{75} \times \sqrt{25} = \sqrt{1875} = 43$ et $\frac{30}{100}$ à moins de 0,01.

** Le mot *derhem* est employé par les algébristes arabes pour désigner les quantités numériques, les termes tout connus de l'équation, et les distinguer des *chéy*, ou termes en x, et des *mâl*, ou termes en x^2.

duit du côté contigu, 13, multiplié par lui–même. Il reste 144. La racine de cela est la colonne. C'est 12. La colonne tombe toujours sur la base suivant deux angles droits, et c'est pour cela qu'on la nomme justement colonne. Multiplie la colonne par la moitié de la base, c'est–à–dire par 7, tu obtiens 84 et c'est la mesure du triangle *. Voici la figure ** :



La troisième espèce; Obtusangle. C'est le triangle qui a un angle obtus. Ce triangle a pour chaque côté un nombre différent; soit un de ses côtés six, un côté cinq, un côté neuf. Tu connaîtras sa mesure par son *masquèt al hadjar* et sa colonne. Or le *masquèt al hadjar* intérieurement ne tombe que sur le plus grand côté. Prends celui–ci pour base. Si tu posais un des deux plus petits côtés pour base, le *masquèt al hadjar* serait projété en dehors d'elle. Tu trouveras son *masquèt al hadjar* et sa colonne, en suivant la même marche que je

* Voici la marche suivie par Mohammed ben Moussa :

$$15^2 - (14 - x^2) = 13^2 - x^2$$
$$15^2 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2$$
$$29 + 28\,x = 169$$
$$28\,x = 140$$
$$x = 5$$
$$\text{Colonne} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$
$$\text{Triangle} = 12 \times \frac{14}{2} = 12 \times 7 = 84.$$

Pour trouver dans un triangle quelconque le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets, Behâ Eddîn emploie la formule

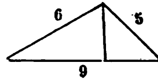
$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)\,(b-c)}{2a}\ .$$

Pour $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$, cette formule donne

$$x = 7 - \frac{28 \times 2}{2 \times 14} = 7 - 2 = 5\ .$$

** La hauteur et les troi côtés du triangle sont les quatre nombres entiers consécutifs, 12, 13, 14, 15. Nous résumerons ici les observations auxquelles ces mêmes nombres, qui se rencontrent dans un exemple de triangle donné par Brahmegupta, ont conduit M. Chasles (Aperçu historique). « Ces » nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non » seulement par les Hindous, mais aussi par Héron d'Alexandrie, Héron le jeune, les trois fils de » Moussa ben Chaker, Léonard de Pise, Jordan, Luca di Burgo, Georges Valla, Tartalea, etc. » L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. Chasles, en y refléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. « En effet, dit-il, on aura cherché naturellement, » pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l' aire de ce » triangle, et conséquemment la hauteur fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se » réduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est » ainsi que Brahmegupta a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles exprimés en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres » sont les plus petits; ce ont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. » Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent, et que les autres » côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle » qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents » géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, » 14, 15. »

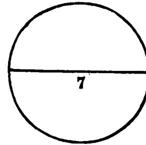
t'ai enseignée dans l'acutangle, et par suite sa mesure. Voici la figure :



Des cercles. – Nous avons terminé l'exposé de leurs propriétés et de leur mesure dans la première partie du livre.

Soit un cercle dont le diamètre est sept deràa, sa circonférence sera vingt-deux deràa. Pour sa mesure, tu multiplies la moitié du diamètre *; c'est-à-dire $3 \frac{1}{2}$ par la moitié de la circonférence dont il est ceint, c'est-à-dire par 11, cela fait $38 \frac{1}{2}$, et c'est sa mesure.

Si cela te plaît, multiplie le diamètre qui est 7 par lui-même, cela fait 49; retranches-en son septième et son demi-septième, c'est-à-dire $10 \frac{1}{2}$, il reste $38 \frac{1}{2}$, et c'est la mesure. Voci la figure :



Si l'on dit : dans un pilier pyramidal la base est quatre deràa par quatre deràa, la hauteur dix deràa, et la tête deux deràa par deux deràa. Nous savons bien que toute pyramide entière a la tête terminée en pointe, et que un tiers de la mesure de sa base multiplié par sa colonne, c'est sa propre mesure. Comme ce pilier-ci n'est pas terminé en pointe, nous voulons savoir de combien l'élever pour rétablir la tête, car il n'a pas de tête. Or nous avons appris que le dix est à la hauteur totale comme le deux est au quatre; mais le deux est la moitié du quatre, donc puisque cela est ainsi, le dix est la moitié de la hauteur. Et la hauteur totale est vingt deràa. Maintenant que nous connaissons la hauteur, prenons un tiers de la mesure de la base, c'est $5 \frac{1}{3}$, multiplions-le par la hauteur qui est vingt deràa; cela s'élève à 106 deràa et $\frac{2}{3}$ deràa. Nous en retrancherons ce que nous avions ajouté afin de le terminer en pointe, c'est-à-dire un tiers de la mesure 2 par 2, ou $1 \frac{1}{3}$, multiplié par dix, ce qui fait 13 et $\frac{1}{3}$. Et c'est là la mesure de ce que nous lui avons ajouté pour qu'il fût terminé en pointe. Si nous enlevons cela de 106 deràa et $\frac{2}{3}$ deràa, il reste 93 deràa et $\frac{1}{3}$, et c'est là la mesure du pilier pyramidal **. Voici la figure:

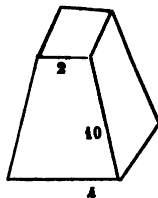
* Il est à remarquer que ni Mohammed ben Moussa, ni Behâ Eddîn n'emploient de mot simple équivalent au nôtre, *rayon*. Ils expriment toujours le *rayon*, en disant *demi-diamètre*. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, à la lettre *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du Lilavati de Bhascara.)

** $10 : H :: 2 : 4$, $H = 20$.

Pyr. entière $= 5 \frac{1}{3} \times 20 = 106 \frac{2}{3}$

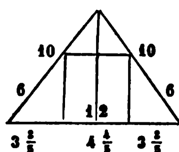
Pyr. complémentaire $= \frac{4}{3} \times 10 = 13 \frac{1}{3}$

Pyr. tronquée ou Pilier pyramidal $= 106 \frac{2}{3} - 13 \frac{1}{3} = 93 \frac{1}{3}$.



Si la base de la pyramide était un cercle, alors retranche du résultat de la multiplication de son diamètre par lui-même, son septième et la moitié de son septième; ce qui reste, c'est sa mesure.

Si l'on dit: une pièce de terre est un triangle dont deux côtés sont dix derâa, dix derâa, et la base douze derâa; elle est circonscrite à une pièce de terre qui est un carré, combien chaque côté du carré? Pour le déterminer, il faut que tu connaisses la colonne du triangle; multiplie la moitié de la base, c'est-à-dire six, par elle-même, ce qui donne 36, retranche cela de l'un des deux plus petits côtés multiplié par lui-même, c'est-à-dire de 100, il reste 64, prends-en la racine, 8; c'est la colonne. La mesure du triangle est 48 derâa, résultat dela multiplication de la colonne par la moitié de la base, qui est six. Nous posons un des côtés du carré, *chéy* (x); nous le multiplions par lui-même, il en résulte *mâl* (x^2), nous le gardons. Nous savons qu'il nous est resté deux triangles aux deux côtés du carré, et un triangle au-dessus de lui. Or les deux triangles fixés aux deux côtés du carré sont égaux entre eux, leurs colonnes étant les mêmes et formant entre elles un angle droit. Leur mesure, c'est que tu multiplies *chéy* par 6 *moins* $\frac{1}{2}$ *chéy*, ce qui est 6 *chéy moins* $\frac{1}{2}$ *mâl*; telle est la mesure de la somme des deux triangles qui sont fixés aux deux côtés du carré. La mesure du triangle placé au dessus, c'est que tu multiplies *huit moins chéy*, qui est sa colonne, par *la moitié de chéy*. C'est *quatre chéy moins un demi mâl*. Tout cela additionné ensemble c'est la mesure du carré et la mesure des trois triangles; et c'est *dix chéy*. Tu l'égales avec 48, qui est la mesure du grand triangle. Il suit de là *qu'un chéy* est 4 *derâa* et $\frac{4}{5}$ *derâa*. Et c'est là chaque côté du carré *. Voici la figure:



* $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

$S = 8 \times 6 = 48$

$S = x^2 + \left(6 - \frac{x}{2}\right)x + (8 - x)\frac{x}{2}$

d'où $x^2 + 6x - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^2}{2} = 48$

$10\,x = 48$

$x = \frac{48}{10} = 4\,\frac{4}{5}$.

ESTRATTO

DI

UNA LETTERA SCRITTA IN LINGUA ITALIANA

il dì 21 Gennaio 1864

DA

BERNARDO RIEMANN

AL SIG. PROFESSORE

ENRICO BETTI (*).

Carissimo Amico

. . . . . Per trovare l'attrazione di un cilindro omogeneo retto ellissoidale qualunque, io considero, introducendo coordinate rettangolari x, y, z, il cilindro infinito limitato dalla diseguaglianza:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

ripieno di massa di densità costante: $+1$, se $z < 0$, e di densità: -1, se $z > 0$. Allora se poniamo, come è solito, il potenziale nel punto x, y, z eguale a V e:

$$\frac{dV}{dx} = X, \qquad \frac{dV}{dy} = Y, \qquad \frac{dV}{dz} = Z,$$

si ha per $z = 0$, $V = 0$, $X = 0$, $Y = 0$.

Z è eguale al potenziale dell' ellisse:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

(*) La Scienza deplora altamente la perdita dell' eminente geometra Tedesco avvenuta in Italia il 20 Luglio di quest' anno 1866.

colla densità 2, e si trova col metodo di *Dirichlet*, se denotiamo con σ la radice maggiore dell'equazione;

$$1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{x^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{s} = \mathrm{F} = 0,$$

e

$$\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)s}$$

con D:

$$\int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{\mathrm{F}}\, ds}{\mathrm{D}}.$$

X ed Y si possono determinare dalle equazioni:

$$\frac{d\mathrm{X}}{dz} = \frac{d\mathrm{Z}}{dx}, \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{dz} = \frac{d\mathrm{Z}}{dy}$$

e dalle condizioni:

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0$$

per $z = 0$.

Per effettuare questa determinazione conviene di sostituire invece di $4 \int_\sigma^\infty$, $2 \int_\infty^\infty$ esteso per il contorno intero di un pezzo del Piano degli s, che contiene il valore σ senza contenere verun altro valore di diramazione o di discontinuità della funzione sotto il segno integrale. Se denotiamo le radici di $\mathrm{F} = 0$ in ordine di grandezza con σ, σ', σ'', questi valori sono tutti reali e in ordine di grandezza:

$$\sigma, \quad 0, \quad \sigma', \quad -b^2, \quad \sigma'', \quad -a^2,$$

in modo che:

$$\sigma > 0 > \sigma' > -b^2 > \sigma'' > -a^2.$$

Posto:

$$\mathrm{F} = t - \frac{z^2}{s},$$

viene

$$\mathrm{Z} = 2 \int_\infty^\infty \frac{\sqrt{ts - z^2}}{\mathrm{D}\sqrt{s}}\, ds,$$

$$\frac{d\mathrm{X}}{dz} = \frac{d\mathrm{Z}}{dx} = \int_\infty^\infty \frac{s\frac{dt}{dx}(ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}\, ds}{\mathrm{D}\sqrt{s}};$$

ma:

$$\int_0^z (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d \log \xi \,,$$

e:

$$\frac{s \frac{dt}{dx} ds}{D \sqrt{s}} = - 2abx (a^2 + s)^{-\frac{3}{2}} (b^2 + s)^{-\frac{1}{2}} ds = 4abx \, d \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}.$$

Dunque si trova per integrazione parziale:

$$X = \frac{2\,abxz}{a^2 + s} \int_{\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}} (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} d \log ts.$$

Se si prende la via dell' integrazione come nella espressione di Z il valore dell' integrale sodisfa sempre alla condizione:

$$\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx};$$

ma può differire di funzioni di x e di y, la funzione sotto segno integrale essendo discontinua anche per $t = 0$. Dunque occorre una determinazione ulteriore della via dell' integrazione.

Nella espressione di $\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}$ la funzione sotto segno integrale è continua per $s = 0$; dunque il pezzo del piano degli s, per il cui contorno l' integrale è esteso, deve contenere $s = \sigma$ e può contenere o no $s = 0$, ma nessuno altro dei valori sopra notati. Nella espressione di X questo pezzo deve essere determinato in modo che X sia $= 0$ per $z = 0$; e affinchè ciò avvenga, dovendo contenere $s = \sigma$, deve anche contenere la maggiore radice di $ts = 0$ (la quale è la maggiore radice di $t = 0$, se

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0,$$

ed è $= 0$, se:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0)$$

ma nessun altra radice di $ts = 0$. Perchè per $z = 0$ le radici di $F = 0$ coincidono colle radici di $ts = 0$, e se la via dell' integrazione passasse *tra* due valori di discontinuità che coincidono per $z = 0$, dovrebbe per $z = 0$ passare per questo valore in modo che l' integrale nella espressione di X diverrebbe infinito ed il valore non ostante il fattore z rimarrebbe finito. . . . . .

Vostro aff^mo Amico
Riemann.

MOTO DI UN PUNTO MATERIALE

LUNGO UN ARCO

DELLA LEMNISCATA BERNOULLIANA

NOTA

DI M. AZZARELLI



1. Il Bonati nel Luglio del 1780 pubblicava in Ferrara una sua memoria nella quale, sotto il titolo di *nuova curva isocrona* prendeva a determinare quella linea per la quale *cadendo lungo essa un corpo per qualunque arco impiega un tempo eguale a quello che impiegherebbe cadendo lungo la corrispondente corda* facendo seguito alle curve *isocrona*, e *paracentrica* proposte per la prima volta da Leibnizio (*).

Prendendo per asse delle ascisse la direzione della gravità ed una perpendicolare a questa per asse delle coordinate il Bonati trova l'equazione

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2xy = 0$$

che è quella della lemniscata bernoulliana riferita alle tangenti condotte pel suo centro o punto duplo. Data la costruzione per punti di questa curva, e dimostrate varie altre sue proprietà giunge ad assegnare la pressione contro la curva medesima.

Il Saladini, nel tomo primo delle memorie dell' Istituto pel 1806 in Bologna, Classe di Fisica e Matematica, prendeva a risolvere il problema inverso rispetto quello del Bonati, supponendo cioè la lemniscata bernoulliana dimostrava che l'arco di questa è percorso nello stesso tempo della corda che lo sottende trattando quindi anche il problema del Bonati.

(*) Curva isocrona è quella i cui archi sono tutti percorsi in tempi eguali: paracentrica poi è quella lungo la quale cadendo un corpo si discosta od avvicina egualmente ad un dato punto in tempi eguali.

Noteremo ancora che di questo problema del Bonati sotto il titolo di una proprietà meccanica della lemniscata, n'è stata data una soluzione molto elegante dal Serret nel tomo IX del giornale di Matematiche pure ed applicate, pubblicato da M^r. I. Liouville, prima serie.

Noi prenderemo qui a trattare la medesima questione tanto diretta quanto inversa, proponendoci però dedurla dalle formole generali del moto lungo una linea piana, facendo astrazione da qualunque resistenza. Sarà questo un utile esercizio di calcolo per quei giovani che sono nuovi nella scienza e pei quali soltanto è intrapresa tale applicazione.

2. Abbiamo generalmente pel moto di un punto materiale lungo di una linea piana qualunque, le due equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + k\frac{dy}{ds}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - k\frac{dx}{ds} \qquad (1)$$

ove X, Y sono le forze acceleratrici parallele agli assi coordinati, e k è la forza che ad ogni istante del moto produce il medesimo effetto della curva, o la pressione diretta in senso contrario, onde render libero il sistema.

Supporremo qui che agisca la sola gravità ed al tempo stesso, facendo uso di coordinate polari, porremo

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\varphi$$

ove φ designa l'angolo che il raggio vettore r forma coll'asse delle ascisse. Derivando queste relazioni rispetto il tempo avremo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - \frac{rd\varphi}{dt}\operatorname{sen}\varphi$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\operatorname{sen}\varphi + \frac{rd\varphi}{dt}\cos\varphi$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{drd\varphi}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{rd^2\varphi}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{rd\varphi^2}{dt^2}\cos\varphi \qquad (2)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi + 2\frac{drd\varphi}{dt^2}\cos\varphi + \frac{rd^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - \frac{rd\varphi^2}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi$$

e quindi per le (1) le seguenti

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{drd\varphi}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{rd^2\varphi}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{rd\varphi^2}{dt^2}\cos\varphi = g + k\frac{dy}{ds}\\
&\frac{d^2r}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi + 2\frac{drd\varphi}{dt^2}\cos\varphi + \frac{rd^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - \frac{rd\varphi^2}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi = -k\frac{dx}{ds}
\end{aligned} \qquad (3)$$

3. Da queste eliminando k con moltiplicare la prima per $\frac{dx}{dt}$ e l'altra per $\frac{dy}{dt}$ e sommando troviamo

$$\frac{drd^2r}{dt^3} + \frac{rdrd\varphi^2}{dt^3} + \frac{r^2d\varphi d^2\varphi}{dt^3} = g\frac{dx}{dt}$$

che può mettersi sotto la seguente forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2d\varphi^2}{dt^2}\right) = g\frac{d}{dt}\cdot x$$

onde integrata e sostituito il valore della x ci dà

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2d\varphi^2}{dt^2} = 2gr\cos\varphi + C;$$

ma essendo

$$dr^2 + r^2d\varphi^2 = ds^2$$

sarà

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gr\cos\varphi + C$$

ma quando $t = 0$, supposto che il polo sia su di un punto della trajettoria, e sia pure $u = 0$, risulta $C = 0$, e perciò

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gr\cos\varphi \text{ (*)} \qquad (4),$$

(*) La (4) può dedursi dalle (1) come siegue: essendo nel caso attuale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g + k\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dx}{ds} \qquad (1)'$$

si moltiplichi la prima per dx e la seconda per dy e si sommino, e sarà

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} = gdx.$$

la quale integrata così che ad $x = 0$, corrisponda $u = 0$, troviamo

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gx.$$

la quale ha luogo pel moto lungo qualunque linea purchè agisca la sola gravità. Da questa equazione risulta che data la linea verrà ridotto a due il numero delle variabili tanto che le coordinate sieno polari quanto rettilinee, e viceversa data alcuna proprietà del moto può aversi la linea per la quale questa proprietà si verifica.

4. Supponiamo ora che si abbia una lemniscata bernoulliana per la linea che si deve percorrere: chiamando a il suo semiasse, l'equazione polare che la rappresenta è

$$r^2 = a^2 \cos 2\omega ,$$

intendendo essere ω l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse a.

Se peraltro diciamo A il punto duplo della curva, e per questo intendiamo condotte le due tangenti, esse sono tra loro perpendicolari, ed ognuna forma un angolo semiretto coll'asse della curva. Indicando con AX, AY queste tangenti, supporremo che AX sia diretto nel senso della gravità, prendendolo nel tempo stesso per l'asse polare, onde detto φ l'angolo che il raggio vettore r della curva forma con esso avremo

$$\omega = 45^\circ - \varphi$$

e quindi

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$$

per l'equazione polare della curva. Se di questa ne prendiamo i logaritmi neperiani, e differenziamo, sarà

$$dr = \frac{r d\varphi \cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} ,$$

onde

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\operatorname{sen} 2\varphi} ;$$

e così la (4) si muta in

$$\frac{a^2 d\varphi^2}{dt^2 \operatorname{sen} 2\varphi} = 2ag \cos\varphi \sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

dalla quale

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{\operatorname{sen}\varphi \sqrt{\operatorname{sen} 2\varphi}}} \qquad (6).$$

5. Per integrare facilmente questa funzione si trasformi nella seguente

$$dt = \frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}\sqrt{\frac{a}{g}} \times \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}}\varphi \cos^{\frac{5}{4}}.\varphi} \qquad (7)$$

eve moltiplicati i due termini per $\cos^{\frac{3}{4}}\varphi$ abbiamo

$$dt = \frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}\sqrt{\frac{a}{g}} \times \frac{\cos^{\frac{3}{4}}\varphi d\varphi}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}}\varphi \cos^2\varphi}$$

ovvero

$$dt = \frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}\sqrt{\frac{a}{g}} \times \operatorname{tang}^{-\frac{3}{4}}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

il cui integrale è

$$t = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{tang}^{\frac{1}{4}}\varphi + C\,;$$

e perchè al principio del moto abbiamo

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{così} \quad C = 0,$$

ed il valore del tempo della discesa per l'arco della proposta curva è

$$t = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{tang}^{\frac{1}{4}}\varphi \tag{8}$$

A questo medesimo risultato si può giungere ancora come siegue:

Ripresa la (7) si ponga per comodo

$$dm = \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}}\varphi \cos^{\frac{5}{4}}\varphi}$$

e si faccia

$$\operatorname{sen}\varphi = z,$$

con che trovasi facilmente

$$dm = \frac{dz}{z^{\frac{3}{4}}\left(1 - z^2\right)^{\frac{9}{4}}}.$$

Per far dipendere questa funzione da un solo irrazionale si ponga

$$z = u^4$$

e si otterrà

$$dm = \frac{4du}{\left(1 - u^8\right)^{\frac{9}{8}}}$$

che posto sotto la forma del binomio irrazionale, quale è

$$dm = 2^3 u^{-9} du \left(u^{-8} - 1\right)^{-\frac{9}{8}}$$

soddisfa alla condizione per essere ridotto a forma razionale; e perciò fatto

$$u^{-8} - 1 = v^8$$

si otterrà prontamente

$$dm = -2^3 \frac{dv}{v^2}$$

da cui

$$m = \frac{2^3}{v}$$

ove non aggiungiamo costante perchè sappiamo che deve esser nulla.

Ma

$$v = \frac{\left(1 - u^8\right)^{\frac{1}{8}}}{u} = \frac{\left(1 - \mathrm{sen}^2\varphi\right)^{\frac{1}{8}}}{\mathrm{sen}^{\frac{1}{4}}}$$

ed

$$\frac{1}{v} = \mathrm{tant}^{\frac{1}{4}}\varphi$$

onde

$$m = 2^2 \,\mathrm{tang}^{\frac{1}{4}}\varphi\,,$$

che sostituito otteniamo in medesimo risultato.

5. S'immagini ora condotta la corda tra i due punti

$$r = 0\,, \quad \varphi = 0\,, \quad \text{ed} \quad r\,,\ \varphi$$

avvertendo che lungo di essa la gravità relativa è $g \cos\varphi$: chiamando t' il tempo che s'impiega a percorrerla, abbiamo pel moto uniformamente accellerato

$$r = \frac{g t'^2 \cos\varphi}{2}$$

dalla quale

$$t' = \sqrt{\frac{2r}{g \cos\varphi}}$$

ove sostituito il valore di r appartenente alla lèmniscata, otteniamo

$$t' = \sqrt{\frac{2a\sqrt{2 \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi}}{g \cos\varphi}} = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{tang}^{\frac{1}{4}}\varphi\,,$$

onde essendo $t = t'$, ha luogo il seguente:

Teorema = Lorchè un corpo scende lungo l'arco della lemniscata bernoulliana avendo principio il moto dal punto duplo, o lungo la corda che lo sottende, impiega il medesimo tempo.

Corollario = Il tempo è nullo quando $\varphi = 0$; poichè allora il punto materiale sta nel principio del suo moto: però onde esso punto possa percorrere l'arco della intera lemniscata compresa nella regione positiva degli assi, converrebbe porre $\varphi = 90°$, ma allora risultando $t = \infty$ ne dobbiamo concludere che il punto materiale quando parta dal centro della curva non vi può ritornare.

6. Dalla espressione del tempo deduciamo

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{g^2}{8a^2} t^4 = nt^4$$

facendo per comodo $n = \frac{g^2}{8a^2}$.

Di qui facilmente

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{nt^4} = \frac{\cos \varphi}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 t^8}}$$

e quindi

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \frac{nt^4}{1 + n^2 t^8} = \frac{1}{nt^4 + n^{-1} t^{-4}}$$

e così

$$r^2 = \frac{2a^2}{nt^4 + n^{-1} t^{-4}}$$

per la quale il raggio vettore della lemniscata è dato in funzione del tempo.

È facile riconoscere che questo raggio vettore diventa massimo quando

$$t = \sqrt[4]{8} \sqrt{\frac{e}{g}},$$

mentre il suo denominatore per questo valore è un minimo.

7. Per riconoscere ch'è la sola lemniscata quella linea che gode della dimostrata proprietà si proponga il seguente:

Problema. Determinare quella linea per la quale scendendo un punto materiale per l'azione della sola gravità impieghi il medesimo tempo tanto a percorrere l'arco quanto la corda che lo sottende.

Il tempo impiegato a scendere per un arco di una curva piana è dato da:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{x}} \qquad (9)$$

come scende dalla (4), mentre $x = r\cos\varphi$ e perchè la velocità è sempre dovuta all'altezza, che nel caso nostro è l'ascissa: il tempo poi che s'impiega a scendere per la corda che lo sottende è

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x}} \qquad (*) \quad (10)$$

essendo x, y le coordinate del punto al termine del tempo t. Eguagliando le (9) e (10) si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x}}$$

dalla quale differenziando deduciamo

$$x ds \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 - y^2)\, dx + 2xydy. \qquad (11)$$

Per integrare questa equazione porremo

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\varphi$$

dalle quali

$$dx = dr\cos\varphi - r d\varphi \operatorname{sen}\varphi$$

$$dy = dr \operatorname{sen}\varphi + r d\varphi \cos\varphi$$

che sostituiti nella (11) si otterrà primieramente

$$ds\cos\varphi = dx\cos 2\varphi + dy \operatorname{sen} 2\varphi$$

e quindi

$$ds\cos\varphi = dr\cos\varphi + r d\varphi \operatorname{sen}\varphi$$

dalle quali quadrando si deduce

$$(ds^2 - dr^2)\cos^2\varphi - r^2 d\varphi^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 2r dr d\varphi \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

ed

$$r d\varphi \cos 2\varphi = dr \operatorname{sen} 2\varphi$$

ove separando le variabili si ha

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi\cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

(*) Poichè nel moto uniformemente accelerato ritenute le consuete denominazioni abbiamo

$$u^2 = 2gs, \quad u = gt$$

dalle quali facilmente

$$t = \frac{2s}{u}.$$

il cui integrale è

$$\log r = \frac{1}{2} \log \operatorname{sen} 2\varphi + \log a$$

ed in fine

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi \qquad (12)$$

che rappresenta la lemniscata solita.

Può ottenersi l'integrale della (11) anche nel modo seguente: si ponga

$$y = zx, \qquad y^2 = z^2 x^2$$

dalle quali

$$dy = zdx + xdz$$

$$ydy = z^2 xdx + x^2 zdz$$

che sostituiti danno

$$\sqrt{1+z^2}\sqrt{dx^2(1+z^2) + 2zxdxdz + x^2dz^2} = (1+z^2)\,dx + 2zxdz$$

Quadrando e riducendo si trova

$$(1 - 3z^2)\,xdz = 2\,(1+z^2)\,zdx$$

ove separando le variabili si ha

$$2\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} - \frac{4zdz}{1+z^2}$$

perchè

$$\frac{1-3z^2}{z\,(1+z^2)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{4z}{1+z^2}\right).$$

Integrando e notando per a la costante è

$$x^4\,(1+z^2)^2 = 2a^2 z$$

e perchè

$$z = \frac{y}{x}$$

così

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy,$$

che rappresenta l'equazione della lemniscata quando gli assi coordinati sono le tangenti che passano pel punto duplo.

8. Ripresa la (4) e rappresentata per u la velocità in un punto qualunque dell'arco della linea percorsa avremo

$$u^2 = 2gr\cos\varphi$$

ove sostituito il valore della r dedotto dalla (5) sarà

$$u^2 = 2ag \cos\varphi \sqrt{\text{sen}2\varphi}$$

dalla quale

$$u^2 = 2ag\sqrt{2} \times \text{sen}^{\frac{1}{2}}\varphi \cos^{\frac{3}{2}}\varphi \qquad (13)$$

onde la velocità essendo nulla tanto per $\varphi = 0$, quanto per $\varphi = 90°$, tra questi limiti vi deve essere un valore di φ pel quale la velocità sia massima. Dalla (13) coi noti metodi deduciamo

$$\cos^2\varphi = 3 \,\text{sen}^2\varphi$$

da cui

$$\text{tang.}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad \varphi = 30°.$$

Il corrispondente raggio vettore sarà

$$r = a\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

e la velocità massima propria di questo punto è data da

$$u^2 = ag\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$$

ed il tempo impiegato per acquistare questa velocità è rappresentato da

$$t^2 = \frac{a}{g}\sqrt[4]{\frac{64}{3}}.$$

9. Per determinare la fora k o pressione si riprendano le (3) e si moltiplichino rispettivamente per

$$\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dx}{dt}$$

e si sottraggano, quindi riducendo trovasi

$$-\left[\frac{d\varphi\,(2dr^2 + r^2d\varphi^2) + r\,(dr\,d^2\varphi - d\varphi\,d^2r)}{dt^3}\right] = g\frac{dy}{dt} + k\frac{ds}{dt}.$$

Se ora dicasi ρ il raggio di curvatura al punto di coordinate r, φ sappiamo essere

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2d\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{d\varphi\,(2dr^2 + r^2d\varphi^2) + r\,(dr\,d^2\varphi - d\varphi\,d^2r)}$$

e così dalla coesistenza di queste due equazioni dedurremo

$$-\frac{ds^2}{\rho dt^3}=g\frac{dy}{dt}+k\frac{ds}{dt}$$

e perchè

$$ds=udt$$

così otteniamo

$$k=-\frac{u^2}{\rho}-g.\frac{dy}{ds} \qquad (*) \quad (14)$$

nella quale dovremo sostituire gli elementi che appartengono alla lemniscata.

10. Per questa linea abbiamo primieramente

$$ds=\frac{ad\varphi}{\text{sen}^{\frac{1}{2}}.2\varphi};$$

quindi essendo

$$y=r\,\text{sen}\,\varphi\,, \qquad \text{ed} \qquad r=a\,\text{sen}^{\frac{1}{2}}2\varphi$$

differenziando otterremo

$$dy=\frac{ad\varphi\,\text{sen}\,3\varphi}{\text{sen}^{\frac{1}{2}}.2\varphi}$$

e perciò

$$\frac{dy}{ds}=\text{sen}\,3\varphi.$$

Pel raggio di curvatura, prendendo φ per variabile principale, avremo in generale

$$\rho=\frac{(dr^2+r^2d\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{d\varphi\,(2dr^2+r^2d\varphi^2)-rd\varphi d^2r}$$

(*) Questa medesima espressione può dedursi ancora nel modo seguente: moltiplicando la prima delle (1)' per dy e la seconda per dx e sottraendo otteniamo

$$\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dt^2}=gdy+kds$$

ma

$$\rho=\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}$$

dunque otteniamo

$$k=-\frac{ds^2}{\rho dt^2}-g\frac{dy}{ds}$$

e perchè $\frac{ds}{dt}=u$, così torna la (14).

e per la lemniscata essendo

$$dr^2 = \frac{a^2 \cos^2 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi} d\varphi^2 \ ; \qquad r d^2 r = -\frac{a^2 d\varphi^2}{\operatorname{sen} 2\varphi}(1 + \operatorname{sen}^2 2\varphi)$$

sostituendo risulta

$$\rho = \frac{a^2}{3a \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2\varphi} = \frac{a^2}{3r}.$$

Ora essendo

$$u^2 = 2gx = 2gr \cos\varphi$$

si ottiene

$$k = -g(6 \cos\varphi \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{sen} 3\varphi),$$

e qualora si consideri come pressione contro la curva, rappresentata che sia per k' avremo

$$k' = g(6 \cos\varphi \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{sen} 3\varphi);$$

ma essendo

$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$$

sarà ancora

$$k' = g(15 \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi)$$

la quale diventa massima pel valore di φ che si deduce da

$$5 \cos^2\varphi - 6 \operatorname{sen}^2\varphi = 0$$

cioè

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{5} = \frac{\cos^2\varphi}{6} = \frac{1}{11}$$

onde

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{5}{11}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{6}{11}, \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{5}{6}$$

ed il suo valore massimo è dato da

$$k' = \frac{5.17}{11} g \sqrt{\frac{5}{11}}.$$

Il valore della pressione corrispondente alla massima velocità si ottiene ponendo $\varphi = 30°$, e così trovasi

$$k' = \frac{11}{2} g.$$

11. Merita di esser considerato il caso di $k' = 0$ perchè in questo luogo il punto materiale abbandona la curva, e così ha luogo la spiegazione del valore infinito sotto

il quale si presenta il tempo (§. 5.) onde il punto che si muove ritornasse al luogo di partenza

Ora ponendo

$$15 \operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi = 0$$

deduciamo

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{15} = \frac{\cos^2\varphi}{1} = \frac{1}{16}$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{15}}{4}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{4},$$

onde è operazione assai facile determinare il luogo della data lemniscata nel quale essa viene abbandonata dal punto che si muove per la sola aziono della gravità.

Il valore del raggio vettore r corrispondente a questo punto è dato da

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi = \frac{a^2\sqrt{15}}{8},$$

e quello della velocità dalla quale il punto materiale è animato sarà

$$u^2 = \frac{ag}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

che è diretto secondo la tangente la traiettoria in esso luogo, e perciò il punto materiale descriverà una parabola di determinato parametro.



RIVISTA BIBLIOGRAFICA



RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA

RELATIVO

ALL'EQUAZIONI DI TERZO GRADO

1. Data un'equazione generale di terzo grado determinare un'altra equazione, le radici della quale siano eguali al rapporto di due qualunque della proposta.

Soluzione. Prendiamo un'equazione di terzo grado della forma generale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \qquad (1)$$

e siano α, β, γ le tre radici, è evidente che le nuove radici y della trasformata saranno

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\beta}$$

e la relativa equazione ascende al sesto grado a radici reciproche. Per mezzo delle funzioni simmetriche si potrebbero calcolare i coefficienti della nuova equazione, ma facendo uso dell'eliminazione si rende più semplice la ricerca della detta equazione. Infatti osserviamo che se x sia la radice dell'equazione (1), e chiamando y il rapporto di due radici, il prodotto xy sarà pure radice della (1) per cui sussisteranno le due equazioni di terzo grado

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

$$ay^3x^3 + 3by^2x^2 + 3cxy + d = 0$$

L'eliminazione della x fra queste due equazioni porgerà la nuova equazione di sesto grado in y ed a radici reciproche.

2. Date d' altronde due equazioni di terzo grado

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 , \qquad A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

è noto che dall'eliminazione si otterrà la risultante

$$G^3 + MG^2 - (HN + 2KL) G + (K^2 - MN) H + L^2N = 0$$

ove per brevità si pone

$$G = A'D - AD', \quad H = A'B - AB', \quad K = B'D - BD'$$

$$L = A'C - AC', \quad M = B'C - BC', \quad N = C'D - CD'$$

Nel nostro caso

$$A = a, \quad B = 3b, \quad C = 3c, \quad D = d$$

$$A' = ay^3, \quad B' = 3by^2, \quad C' = 3cy, \quad D' = d$$

e si troverà

$$G = ad\,(y^3 - 1)\,, \quad H = 3aby^2\,(y - 1)\,, \quad K = 3bd\,(y^2 - 1)$$

$$L = 3acy\,(y^2 - 1), \, M = 9bcy\,(y - 1)\,, \quad N = 3cd\,(y - 1).$$

quali valori sostituiti nella risultante, sarà divisibile per $(y - 1)^3$, ed otterremo l' equazione

$$a^3d^3\,(1 + y + y^2)^3 + 9bca^2d^2y\,(1 + y + y^2)^2 - 9bca^2d^2y^2\,(1 + y + y^2)$$
$$- 18bca^2d^2y\,(y + 1)^2(1 + y + y^2) + 27ab^3d^2y^2\,(y + 1)^2$$
$$- 81ab^2c^2dy^3 + 27a^2dc^3y^2\,(y + 1)^2 = 0$$

Ordinandola rispetto alle potenze della y, si trae

$$a^2d^2y^6 + 3\,(a^2d^2 - 3abcd)\,y^5 + 3\,(2a^2d^2 - 15abcd + 9b^3d + 9ac^3)y^4$$
$$+ (7a^2d^2 - 54abcd + 54b^3d + 54ac^3 - 81b^2c^2)\,y^3$$
$$+ 3\,(2a^2d^2 - 15abcd + 9b^3d + 9ac^3)\,y^2 + 3\,(a^2d^2 - 3abcd)\,y + a^2d^2 = 0$$

e come ognun vede è un' equazione di sesto grado a radici reciproche, e la sua risoluzione dipende da un' equazione di terzo grado. Intanto osserviamo che la sostituzione di $y = 1$ indicherà la condizione, onde due per lo meno delle tre radici α, β, γ siano uguali fra di loro, ed il primo membro della precedente equazione tolto il comun divisore 27 diverrà

$$D = a^2d^2 - 6abcd + 4b^3d + 4a^3c - 3b^2c^2$$

e che rappresenta il noto *discriminante* delle forme ed equazioni di terzo grado.

3. Per ottenere l'equazione di terzo grado dipendente da quella di sesto grado a radici reciproche pongasi

$$y + \frac{1}{y} = z\,, \qquad y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2\,, \qquad y^3 + \frac{1}{y^3} = z^3 - 3z$$

mentre dividendo l'equazione per y^3, otterremo

$$a^2d^2\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+3\,(a^2d^2-3abc)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+3\,(2a^2d^2-15abcd+9b^3d+9ac^3)\left(y+\frac{1}{y}\right)$$
$$+ 7a^2d^2 - 54abcd + 54b^3d + 54ac^3 - 81b^2c^2 = 0$$

Sostituiti i valori in funzione della z, ed ordinata rapporto alle potenze di z, si avrà

$$a^2d^2z^3 + 3\,(a^2d^2 - 3abcd)\,z^2 + 3\,(a^2d^2 - 15abcd + 9b^3d + 9ac^3)\,z$$
$$+ a^2d^2 - 36abcd + 54b^3d + 54ac^3 - 81b^2c^2 = 0$$

Qui pure la condizione onde per lo meno due delle tre radici α, β, γ siano eguali sarà col fare $z = 2$ e si trova la condizione di sopra pel discriminante nullo. Tali sono le differenti equazioni, dalle quali si riconosce la formazione del *discriminante* si utile nella teoria dell'equazioni.

4. Aggiungiamo infine come si esprimano le tre radici α, β, γ per mezzo del rapporto generico y. A quest' oggetto riprendiamo le due equazioni

$$(1) \qquad ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

$$(2) \qquad ay^3x^3 + 3by^2x^2 + 3cyx + d = 0$$

sottratta una dall' altra abbiamo

$$(1) - (2) = ax^3\,(1 - y^3) + 3bx^2\,(1 - y^2) + 3cx\,(1 - y) = 0$$

la quale divisa pel prodotto $x\,(1 - y)$ diviene

$$(3) \qquad ax^2\,(1 + y + y^2) + 3bx\,(1 + y) + 3c = 0$$

Similmente moltiplicando la (1) per y^3, e sottratta dalla (2) darà

$$(1)\,y^3 - (2) = 3bx^2\,(y^3 - y^2) + 3cx\,(y^3 - y) + d\,(y^3 - 1) = 0$$

e diviso per $y - 1$ si riduce a

$$(4) \qquad 3by^2x^2 + 3cy\,(1 + y)\,x + d\,(1 + y + y^2) = 0$$

*

Moltiplicando infine la (3) per $3by^2$, e la (4) per $a(1+y+y^2)$ e sottraendole si avrà

$$(3)\,3by^2 - (4)\,a(1+y+y^2) =$$

$$9b^2y^2(1+y)x - 3acy(1+y)(1+y+y^2)x + 9bcy^2 - ad(1+y+y^2)^2 = 0$$

d' onde per la x si trova

$$x = \frac{1}{y(1+y)} \cdot \frac{ad(1+y+y^2)^2 - 9bcy^2}{9b^2y - 3ac(1+y+y^2)}$$

e potrà rappresentare una radice α della (1): per le altre due radici β, γ, si avrà

$$\beta = yx\,, \qquad \gamma = -\frac{3b}{a} - x - xy$$

ed a riduzioni eseguite otterremo

$$\beta = yx = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{ad(1+y+y^2)^2 - 9bcy^2}{9b^2y - 3ac(1+y+y^2)}$$

$$\gamma = \frac{1}{ay}\left(\frac{9abcy(1+y)^2 - 27b^3y^2 - a^2d(1+y+y^2)^2}{9b^2y - 3ac(1+y+y^2)}\right)$$

Se nei ritrovati valori di α, β, γ si ponesse $y=1$ vi saranno par lo meno due radici eguali, e le avremo tutte sotto forma razionale

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{ad - bc}{b^2 - ac}, \qquad \gamma = \frac{1}{a} \cdot \frac{4abc - 3b^3 - a^2d}{b^2 - ac}$$

In questo caso è nullo il discriminante, e di più può scriversi sotto la forma.

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 0$$

quindi eliminando dai precedenti valori di α, β, γ il denominatore $b^2 - ac$ si trae pure

$$\alpha = \beta = \frac{2(c^2 - bd)}{ad - cb}$$

$$\gamma = \frac{1}{a} \cdot \frac{4(4abc - 3b^3 - a^2d)\,c^2 - bd)}{(ad - bc)^2}$$

I precedenti sviluppi algebrici sono stati suggeriti dalla lettura di un' articolo che trovasi in un periodico inglese sotto il titolo *The Educational times journal of the College of Preceptors* August 1866 Question 1983 pag. 108 (Proposed by W. Lea). *Solution by the* Rev. Robert Harley F. R. S., ed ove si trovano le tre radici x espresse per il rapporto y, l'equazione reciproca di sesto grado, e la sua ridotta di terzo grado: e la condizione del discriminante nullo nel caso di radici eguali

Roma 31 Agosto 1866.

BARNABA TORTOLINI.

PUBBLICAZIONI RECENTI

Fiedler – Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, von G. Salmon. Zweite umgearbeitete und verbesserte Auflage, *Leipzig* 1866.

C. Neumann – Haupt-und Brenn-Puncte eines Linsen-Systemes. Elementare Darstellung der durch Gauss begründeten Theorie. *Leipzig* 1866.

W. J. Miller – Mathematical Questions with their solutions, from the *Educational Times*. vol V from january to july 1866. – *London* 1866.

Painvin – Theorie des surfaces polaires d'un plan - *Lille* 1866.

Mossotti – Memoria postuma sopra la determinazione delle orbite dei corpi celesti per mezzo di tre osservazioni - *Pisa* 1866.

Painvin – Recherches des points à l'infini sur les surfaces algébriques – *Berlin* 1866.

Hargreave – An essay on the resolution of algebraic equations - *Dublin* 1866.

Zeuthen – Bestemmelse af Charakteristikerne i de elementare Systemer af Flader af anden Orden - *Kjöbenhaon* 1866.

Prym – Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche - *Zurich* 1866.

Chelini – Sugli assi centrali delle forze e delle rotazioni nell' equilibrio e nel moto dei corpi (Mem. Accad.) - *Bologna* 1866.

Borchardt – Bestimmung des Tetraeders von grössten Volumen bei gegebenem Inhalt seiner vier Seitenflächen - *Berlin* 1866.

Riemann – Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen - *Berlin* 1866.

Poudra – De l'involution plane - Propriétés du tétraèdre polaire - *Paris* 1866.

Brioschi – Sopra alcune nuove relazioni modulari (estr. dagli Atti della R. Accad. vol. III) - *Napoli* 1866.

Schiaparelli – Sul modo di ricavare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche – *Milano* 1866.

Piani – Del metodo newtoniano per la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche (Mem. Accad.) - *Bologna* 1866.

Betti – Sopra la teoria della capillarità – *Pisa* 1866.

Cremona – Preliminari di una teoria geometrica delle superficie (Mem. Accad.) - *Bologna* 1866. (Si vendono copie a parte presso l'autore al prezzo di lire 5).

INDICE GENERALE

DI TUTTI GLI ARTICOLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA



IMPRIMATUR

Fr. Hieron. Gigli O. P. S. P. A. Magister.

IMPRIMATUR

Petrus Villanova-Castellacci Archiep. Petr. Vicesgerens.

